МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и компьютерных наук

Утверждена
на Ученом совете ФГБОУ ВО
«Дагестанский государственный университет»
протокол № 4 от 25.03 2021 г.

Ректор университета

Рабаданов М.Х.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности
01.01.01 - Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Махачкала, 2021

Программа кандидатского экзамена по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) составлена на основе паспорта научной специальности и учебного плана ДГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Составитель: Рамазанов А.К., д.ф.-м.н, профессор

Программа обсуждена и одобрена на заседании кафедры математического анализа 26 февраля 2021 года, протокол № 6.

Заведующий кафедрой
математического анализа ________________ Рамазанов А.К.

Программа кандидатского экзамена утверждена
на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук
26 февраля 2021 года, протокол № 5.

Декан факультета
математики и компьютерных наук ________________ Якубов А.З.

Программа кандидатского экзамена согласована:

Начальник Управления
аспирантуры и докторантуры

«15» 03 2021 г. ________________ Э.Т. Рамазанова

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: теория функций действительной переменной (вещественный анализ); теория функций комплексной переменной (комплексный анализ); функциональный анализ.

1. Вещественный анализ

1.1. Меры, измеримые функции, интеграл

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([1], гл. V; [Д1], гл. 8-12)

I.2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([1], гл. VI; [Д1], гл. 14-16)

I.3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства $\mathbf{L}p$, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в $\mathbf{L}2$ и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([1], гл. VII; [5], гл. VII)

I.4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярнымы интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса. ([1], гл. VIII, §§ 1-7)

2. Комплексный анализ

2.1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. ([5], гл. IV)

2.2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. ([5], гл. V–VII)

2.3. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([5], гл. III, § 1,3, гл. XII, §§ 1,2,6,7)

2.4. Гармонические функции

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([6])

3. Функциональный анализ

3.1. Метрические и топологические пространства

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. ([1], гл. II)

3.2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L*p*. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([1], гл. III)

3.3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([1], гл. IV, §§1–3,5,6)

3.4. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([8], гл. VI–VIII)

3.5. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([1], гл. X)

3.6. Обобщенные функции

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. IV, §4, гл. VIII, §8; [7], гл. II)

Основная литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа - Москва: Физматлит, 2012
Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 7-е изд. - Москва : Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-9221-0266-7 ; То же [Электронный ресурс]. -
URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563 (20.06.2018).

2. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие - Москва: Наука, 1974
Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной : учебное пособие /

И.П. Натансон. - Изд. 3-е. - Москва : Наука, 1974. - 480 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802 (20.06.2018).

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3 - Москва: Физматлит, 2002
Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц ; ред. А.А. Флоринского. - Изд. 6-е. (1-е изд. - 1949 г.). - Москва : Физматлит, 2002. - Т. 3. - 727 с. - ISBN 5-9221-0155-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196(20.06.2018).

4. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. II. М.: Наука, 1975 (Физматлит,2001).

5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (Лань, 2009).

6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976 (Физматлит, 2004).

7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1976 (1981).

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1976.

Дополнительная литература

Д1. Действительный анализ в задачах: учебное пособие - Москва: Физматлит, 2005
Действительный анализ в задачах : учебное пособие / П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко и др. - Москва : Физматлит, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331 (20.06.2018).

Д2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М., Наука, 1991.

Д3. Зорич В.А. Математический анализ, т. II. М., Наука, 1984.

Д4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. http://elibrary.ru – eLIBRARY – Научная электронная библиотека

2. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12 – Единое окно доступа

к электронным ресурсам

3. http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/ - платформа ресурсов

издательства Springer

4. http://edu.dgu.ru/ - Образовательный сервер ДГУ

5. Электронный каталог НБ ДГУ[Электронный ресурс]: база данных содержит сведения о всех видах лит, поступающих в фонд НБ ДГУ/Дагестанский гос. ун-т. – Махачкала, 2010 – Режим доступа: http://elib.dgu.ru, свободный (дата обращения:).

6. http://www.consultant.ru/ - КонсультантПлюс