

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

Материалы XII Международной конференции, приуроченной к 85-летию
профессора Алишаева М.Г.,
19-22 сентября 2017 г.

Махачкала 2017

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Дагестанского государственного университета

УДК 517.9

Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XII Международной конференции, 19-22 сентября 2017 г.

Махачкала, издательство ДГУ, 2017 г.

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н., профессор Магомедов А.М. (ответственный редактор)

д. ф.-м. н., профессор Сиражудинов М.М.

к. ф.-м. н., доцент Бейбалаев В.Д.

к. ф.-м. н., доцент Якубов А.З.

Дагестанский государственный университет, 2017

Оглавление

| | |
|--|----|
| М.Б. Абазоков Задача Коши для нагруженного уравнения теплопроводности . | 10 |
| Г.О. Абдуллаев, А.А. Потапов, А.К. Рабазанов, А.Э. Рассадин Новый критерий различения периодических и хаотических режимов в динамических системах (на примере модели Рикитаке)..... | 10 |
| Г. С. Абдуллаев. Моделирование механизмов шагающих балок нагревательных печей..... | 13 |
| Г.С. Абдуллаев, Н.И. Мустафаева Математическая модель смещения в зоне стыка бурильных труб..... | 16 |
| Э.И. Абдурагимов, Т.Ю. Гаджиева, П.К. Магомедова Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду четвертого порядка..... | 20 |
| А.М. Агаларов, Т.А. Гаджимурадов, А.А. Потапов, А.Э. Рассадин Эффекты первичной анизотропии при росте поверхности твёрдого тела с цилиндрической образующей | 23 |
| A. M .Agalarov , T. A. Gadzhimuradov, A .A. Potapov and. A. E. Rassadin Edge states and solitons in quantum Hall and Chern-Simons fields..... | 25 |
| Х. И. Аджиева Проверка условий существования решений ФДУ второго порядка исчезающих на полуоси на конкретном примере | 27 |
| С.М. Алейдаров Асимптотика решений ФДУ первого порядка в гильбертовом пространстве со степенным весом..... | 30 |
| М. С. Алейдаров Разрешимость ФДУ второго порядка с линейным отклонением аргумента..... | 35 |
| П.Х. Алибеков, Р.М. Магомедова Алгоритм поиска кратчайших связей между предприятиями..... | 39 |
| Б.А. Алиев Разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с комплексным параметром и с линейным оператором в краевых условиях..... | 42 |

| | |
|---|----|
| А.В. Алиев, Г.И. Юсифова Отсутствие глобальных решений задачи Коши для систем из трех нелинейных волновых уравнений с положительной начальной энергией..... | 48 |
| А.Б. Алиев А.Б., А.Ф. Пашаев Отсутствие глобальных решений задачи Коши для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений со структурной диссипацией..... | 49 |
| М.С. Алиев Формулы для вычисления одного вида определителей | 50 |
| А.А. Аливердиев Взаимодействие мощного лазерного излучения с веществом: эксперимент, обработка данных и моделирование..... | 54 |
| Б.И. Алибеков, Э. А. Мамаев Мультиагентные системы в логистике: информационно-аналитические аспекты..... | 55 |
| З.З. Алисултанов Собственные функции и собственные значения слабофрактального квантового осциллятора..... | 59 |
| Т.С. Амучиева Об одном классе квазилинейных эллиптических систем первого порядка..... | 69 |
| Н. М. Асланова, Байрамоглы М., Х.М. Асланов О спектре и следе дифференциального оператора с операторным коэффициентом..... | 70 |
| С.Н. Асхабов ^{1,2} , М.А. Бетилгириев ³ Нелинейные интегральные и интегродифференциальные уравнения типа свёртки с ядрами специального вида | 72 |
| А.Х. Атгаев Краевые задачи для нагруженного вдоль своих характеристик гиперболического уравнения | 75 |
| С.А. Ахмедов, З.Х. Ахмедова, Ж.А. Мамаева Математическое моделирование процесса истощения залежей легких нефтей..... | 76 |
| С.А. Ахуньянова, П.М. Симонов Об эконометрической и P -адической аппроксимации динамики индекса РТС: сравнение двух моделей | 80 |
| С.Г. Байрамова Использование математического пакета MAPLE в курсе высшей математики..... | 82 |
| Ж.А. Балкизов Об одной смешанной задаче для уравнения параболического типа третьего порядка с кратными характеристиками..... | 86 |

| | |
|--|-----|
| С.А.Бутенков Математические модели и численные методы гранулированных вычислений | 88 |
| А.И. Вагабов Краевая задача шестого порядка..... | 92 |
| Г.Ф. Гаджиева Движение газо- и парожидкостных потоков | 93 |
| Гадиева С.С. Динамические и тепловые пограничные слои на вращающемся теле с отсосом | 95 |
| Гахраманов П.Ф., Багирова Г.Г. Система уравнений движения для отдельных фаз смеси | 98 |
| Гахраманов П.Ф., Гулиев Е.Ф. К вопросу гидродинамики коллекторных теплообменных аппаратов..... | 100 |
| М.Я. Гозалова Особенности использования пакета MATLAB в курсе высшей математики..... | 102 |
| T. Goy Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence | 107 |
| H.F.Guliyev, V.N.Nasibzade On determination of initial function in mixed problem for a second order hyperbolic equation | 109 |
| М.М.Гусйнов ¹ , В.С.Русаков ² , Э.Казанова ¹ Особенности математической обработки Гамма- резонансных спектров метеоритов..... | 113 |
| И.И.Джаббаров, И.С.Сафарли Вывод расчётных формул по определению показателей процесса разработки двухпластовой системы..... | 122 |
| Л.М. Джамбетова, А.Я. Якубов, Л.Д. Шанкишвили Классы функций типа псевдогогнутой и их приложения..... | 125 |
| Джамбетова Л. М., А.Я. Якубов, Л. Д. Шанкишвили О неравенствах П. Л. Чебышева в общих линейных пространствах со скалярным произведением.. | 126 |
| М.М.Зайнулабидов, З.М.Зайнулабидова Об одном интегральном уравнении со степенным ядром с особенностью типа Трикоми и его некоторые приложения | 125 |
| В.М. Захаров, С.В. Шалагин, А.Ф. Хасьянов Конвейерная модель вычисления остатка по заданному модулю для потока чисел | 132 |
| Т.И. Ибавов Сжатие изображений с помощью вейвлетов дробного порядка .. | 136 |

| | |
|--|-----|
| З.И. Ибрагимова Верификация индивидуальных планов офисными средствами языка C#..... | 138 |
| С. Э. Исаева Смешанная задача для одной системы с акустическими граничными условиями..... | 142 |
| Р.Ш. Исмаилов, У.В. Алимарданов Движения вязкой среды в двухфазных системах..... | 143 |
| С.В. Исраилов, А.А.Сагитов Система интегральных уравнений с точечными сингулярностями | 146 |
| С. В. Исраилов, А.М. Гачаев Краевая задача типа Коши с граничными условиями относительно производных для системы ОДУ..... | 147 |
| Исраилов С.В., Гачаев А.М. Краевая задача для системы ОДУ с нелинейными функциональными условиями общего вида..... | 149 |
| Н.С. Кривша, В. В. Кривша Эффективные алгоритмы грануляции многомерных числовых данных в системах обработки изображений..... | 151 |
| Н.Т. Курбанов, У.С. Алиева Исследование динамических волн в полупространстве с учетом неоднородности среды..... | 155 |
| С. А. Лавренченко Проверка нормальности результатов мониторинга электропотребления | 158 |
| А.М.Магомедов ¹ , Т.А. Магомедов ² Компьютерное построение интервальной раскраски двудольных графов | 165 |
| А.М. Магомедов, Т.А. Магомедов Сокращенное перечисление двудольных графов заданного порядка | 167 |
| Р.М. Магомедова Сжатое представление связей между кредитными учреждениями..... | 182 |
| Г.А. Магомедов, З.О. Гилалова Формула общего представления решения и условия разрешимости квазилинейного неоднородного уравнения типа Коши-Римана..... | 184 |
| Е.С. Магомедова, М.Т. Раджабова Математическая модель стохастической игры защиты информации..... | 186 |

| | |
|---|-----|
| Р.И. Магомедов, И.И.Магомедов Физический, геометрический, экономический смысл дробной производной..... | 187 |
| Р.А. Магомедов ^{1*} , Р.Р. Мейланов ¹ , Э. Н. Ахмедов ¹ , В.Д. Бейбалаев ^{2,1} , А.А. Аливердиев ^{1,2} К расчёту термодинамических характеристик воды на основе фрактального уравнения состояния | 189 |
| Р.Х. Макаова Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка..... | 191 |
| О.Х. Масаева Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Римана-Лиувилля в верхней полуплоскости..... | 193 |
| Я.М.Мирзабеков, Ш.Б. Шихиев Компьютерная грамматика ЕЯ | 194 |
| Ш.А. Мурадова, М.Н. Омарова Эллиптические уравнения с измеримыми коэффициентами в обобщенных весовых пространствах Морри..... | 201 |
| К.С. Мусабеков Существование решения системы уравнений в вариациях в одной задаче оптимального управления..... | 201 |
| В.А.Мустафаев, М.Н.Салманова Моделирование динамических взаимодействующих процессов с применением подклассов нечётких временных сетей Петри | 205 |
| А.Л. Нагоров Численные методы для дробных операторов в системах обработки изображений..... | 210 |
| Р.М. Нигматулин, М.М.Кипнис, М.Ю.Вагина Аналог теоремы Фельдбаума для разностного уравнения | 214 |
| З.Н.Рагимова Неустановившееся движение жидкости в полубесконечном пласте..... | 216 |
| В.Р.Рагимханов Верхнее и нижнее решения для интегрального включения Урысона с отклоняющимся аргументом..... | 219 |
| Н.Ш. Раджабова Методы теории графов для анализа интересов пользователей социальных сетей | 221 |
| А.-Р.К. Рамазанов, В.Г. Магомедова О явлении Гиббса для интерполяционных рациональных сплайнов..... | 222 |

| | |
|---|-----|
| С.Ш. Рехвиашвили ¹ , А.В. Псху ¹ , А.М. Кидакоев ² Колебания балки с заделанными концами с учетом динамического гистерезиса..... | 224 |
| Н.А. Рзаева, Е.М. Фархадова Решение смешанных задач для систем Тимошенко и Бresse методом динамической граничной регуляризацией..... | 227 |
| М.К. Ризаев О свойствах одного интегрального оператора из импульсных представлений гамильтонианов квантовомеханических систем | 228 |
| К.Ф. Рустамова, П.Ф. Гахраманов О влиянии дисперсных частиц на турбулентное движение двухфазной среды | 230 |
| И.С. Сафарли, Б.Я. Сафарли К методам приближенных вычислений значений радикалов..... | 233 |
| М.М. Сиражудинов О гильдеровости решений краевой задачи Римана-Гильберта для обобщенной системы Бельтрами с нормальными матрицами коэффициентов | 235 |
| М.М. Сиражудинов ,С.П. Джамалудинова О G-компактности одного класса эллиптических систем второго порядка..... | 236 |
| М.М. Сиражудинов ,Ш.Р. Рамазанов О гильдеровости решений одной задачи Римана-Гильберта для треугольных систем..... | 237 |
| Р.Н.Тураев ¹ , К.Н.Тураев ² Неклассическая задача со свободной границей типа Флорина для нагруженного параболического уравнения..... | 238 |
| Р.Н.Тураев Об одной нелокальной задаче со свободной границей типа Флорина для квазилинейного уравнения диффузии..... | 241 |
| Ф.Г. Фейзиев ¹ , М.Р. Мехтиева ² Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 4D-модулярный динамических систем | 242 |
| А.Р.Хаиров Дифференциально-разностные уравнения для некоторых семейств функция | 245 |
| Jordan Hristov The radiation diffusion equation: Explicit analytical solutions by improved integral-balance method..... | 248 |
| И.М. Челябов, С.Н. Мутова Разрешение методико-математических вопросов с помощью принципа ограничений..... | 265 |
| Ш. Б. Шихиев ¹ , Ф.М. Раджабова ² Кс-грамматика предложений на ЕЯ | 267 |

| | |
|---|-------|
| С.В. Шалагин, С.А. Гришанов Реализация алгоритма Шора на основе IP-ядер в архитектуре ПЛИС/FPGA..... | 272 |
| С.В. Шалагин, Д.Р. Харисов Моделирование генератора дискретных случайных величин с заданным законом распределения в архитектуре ПЛИС/FPGA..... | 276 |
| С.В. Шалагин, Г.Э.Шалагина Когнитивные проблемы компьютерного моделирования как предмет исследования информатики и социогуманитарных наук | 27979 |
| С.Н. Эмиров ¹ , В.Д. Бейбалаев ^{1,2} , А.А. Аливердиев ^{1,2} , , А.А. Амирова ² , Г.Г. Галжиев ² , А.Э. Рамазанова ¹ , , Ф.Ф. Малиева ² Расчет теплопроводности песчаника в зависимости от давления..... | 284 |
| А.З. Якубов Моделирование потоковыми методами задачи дефрагментации матрицы расписания | 287 |
| Ш.Г. Гамидов Сознание подсказывает..... | 290 |

УДК 517.95

Задача Коши для нагруженного уравнения теплопроводности

М.Б. Абазоков

Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН

В докладе рассматривается уравнение вида

$$u_t = u_{xx} + \lambda u(x, t),$$

где λ - заданное действительное число. Уравнение (1) относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений [1, стр.17].

Задача Коши. Найти функцию $u(x, t)$ ($t > 0, -\infty < x < +\infty$), удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

где $\tau(x)$ - заданная непрерывная и ограниченная функция.

Методом преобразования Лапласа доказано, что решение задачи Коши представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tau(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} - \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k t^{k-\frac{1}{2}} \phi\left(-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; -\frac{|x_0 - \xi|}{\sqrt{t}}\right) \right] d\xi,$$

где $\phi(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(an + b)}$ - функция Райта [2, стр. 23].

Литература

[1] - Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232с.

[2] - Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199с.

УДК 517.92

Новый критерий различения периодических и хаотических режимов в динамических системах (на примере модели Рикитаке)

Г.О. Абдуллаев¹, А.А. Потапов², А.К. Рабазанов¹, А.Э. Рассадин³

¹Институт физики им. Х.И. Амирханова ДНЦ РАН

²Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

³Нижегородское математическое общество

Как хорошо известно, автономные динамические системы:

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in R^d, \quad (1)$$

с размерностью фазового пространства $d \geq 3$ для определённых значений вектора параметров $\mu \in R^m$ могут обладать хаотическим поведением [1]. В ходе исследования динамики таких систем важное значение имеет изучение спектра колебаний фазовых переменных, потому что трансформация этого спектра из линейчатого в непрерывный при изменении параметров рассматриваемой системы означает переход от периодического или квазипериодического поведения системы к хаотическому поведению [1].

С помощью переноса понятий статистической радиофизики в теорию динамических систем мы предлагаем новый, более тонкий критерий различения этих двух типов поведения, а именно, рассмотрим тройную автокорреляционную функцию [2] одной из динамических переменных системы (1):

$$K_s(\tau_1, \tau_2) = \langle x_s(t) \cdot x_s(t + \tau_1) \cdot x_s(t + \tau_2) \rangle, \quad s \in \{1, 2, \dots, d\}, \quad (2)$$

где угловые скобки означают усреднение по мере Крылова-Боголюбова [1], и её двойное преобразование Фурье, т. е. биспектр [2]:

$$B_s(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_s(\tau_1, \tau_2) \cdot \exp(-i \cdot \omega_1 \cdot \tau_1 - i \cdot \omega_2 \cdot \tau_2) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2. \quad (3)$$

Поскольку при переходе системы (1) от периодического/квазипериодического движения к хаотическому она обладает либо свойством эргодичности, либо свойством перемешивания [1], то в формуле (2) можно перейти от усреднения по ансамблю к усреднению по времени. Это означает, что при численном решении системы (1), например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности, с шагом по времени Δt на отрезке

$[0, 2 \cdot N \cdot \Delta t]$ можно получить следующую оценку для тройной автокорреляционной функции (2) на квадрате $[0, N \cdot \Delta t] \times [0, N \cdot \Delta t]$:

$$Q_{jk}^s = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_{s,n} \cdot x_{s,n+j} \cdot x_{s,n+k}, \quad (4)$$

где $x_{s,n}$ — результат численного решения системы (1) в момент времени $n \cdot \Delta t$.

Соответственно, из формулы (4) найдём оценку биспектра (3):

$$B_{jk}^s = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N U_{jl} \cdot U_{km} \cdot Q_{lm}^s, \quad (5)$$

где $U_{jk} = \exp\left[-i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot j \cdot k}{N}\right]$ — унитарная матрица дискретного преобразования Фурье [3].

В докладе для иллюстрации эффективности введённого выше критерия представлены графики оценок тройной автокорреляционной функции (4) и биспектра (5) для каждой из динамических переменных системы Рикитаке [4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\mu_1 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 \cdot x_2 + (x_3 - \mu_2) \cdot x_1 \\ \dot{x}_3 = 1 - x_1 \cdot x_2 \end{cases} \quad (6)$$

как для случая нахождения двумерного вектора (μ_1, μ_2) её параметров в области квазипериодических фазовых траекторий, так и для случая нахождения этого вектора в области хаотических фазовых траекторий.

Наш интерес именно к этой динамической системе обусловлен тем, что в докладе [5] было предложено использовать натурный макет системы (6) в качестве генератора хаотических электрических колебаний в новом поколении помехоустойчивых систем передачи информации [6].

Литература

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.— 296 с.: ил.
2. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.— 376 с.: ил.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. — СПб.: Питер, 2007.— 751 с.:
4. Кук А., Робертс П. Система двухдискового динамо Рикитаке // Странные

аттракторы: Сб. ст. / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 164–192.

5. Potapov V.I., Rakut I.V., Rassadin A.E. Generalized Rikitake systems and their applications // International conference ‘Shilnikov WorkShop 2014’, dedicated to the 80th birthday of Professor Leonid Pavlovich Shilnikov (Nizhny Novgorod, Russia, December 17-19, 2014). Book of abstracts.

– N. Novgorod, 2014. P. 36-37.

6. Леонов К.Н., Потапов А.А., Ушаков П.А. Использование инвариантных свойств хаотических сигналов в синтезе новых помехоустойчивых широкополосных систем передачи информации // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59. № 12. С. 1209-1217.

УДК 621.9:001.57.001.2

**Моделирование механизмов шагающих балок
нагревательных печей**

Г. С. Абдуллаев

Сумгаит, Сумгаитский государственный университет

E-mail: Abdullayev.qs@bk.ru

Механизмы шагающих балок (МШБ) получили широкое распространение в печах с числовым программным управлением в качестве привода подач ввиду ряда преимуществ, в первую очередь, вследствие сравнительной простоты системы управления обусловленной отсутствием датчиков обратной связи. В приводе этого типа в качестве двигателя применяется двухступенчатый агрегат, состоящий из шаговой балки (ШБ) и гидравлического усилителя (ГУ) крутящего момента.

Целью работы является моделирование механизмов шагающих балок нагревательных печей. Механические звенья, так же как и в приводах других типов, представляют собой нелинейную колебательную систему в соответствии с обобщённой схемой машины. Связаны с ГУ пряли и обратной связями. Различие в физической припади элементов МШБ привело к тому, что в настоящее время достаточно подробно изучены его отдельные элементы,

однако комплексные исследования всей системы в целом практически не проводились. Связь между блоками осуществляется путем моделирования открытия x_3 щели золотникового распределителя, связывающего ШБ и ГУ, которое зависит от угла рассогласования между их валами:

$$x_3 = i(\varphi_{ШБ}) - \varphi_{ГУ} = i \int_0^t (\Omega_{ШБ} - \Omega_{ГУ}) dt \quad (1)$$

где $\varphi_{ШБ}$ – угол поворота валов ШБ и ГУ. $\Omega_{ШБ}, \Omega_{ГУ}$ их угловые скорости; i – передаточное отношение сравнивающего механизма. При таком отображении связи ГУ и ШБ не возникает ограничений на время моделирования. В современных МШБ сравнивающий механизм выполнен в виде винтовой пары, в которой винт вращается от ШБ и перемещается поступательно относительно гайки, которая связана с ротором ГУ. При таком исполнении.

$$i = \frac{S}{2\pi} \quad (2)$$

Где S – шаг винтовой пары сравнивающего механизма. Момент сопротивления $M_{ТШ}$ на валу ШБ в модели воспроизводится блоком как момент сил трения без смазки в соответствии с уравнением [1].

$$F_{тр} = \begin{cases} -F_{мп} = F_0 \operatorname{sign} n \text{ при } \dot{x} \neq 0 \\ +F_0, \text{ при } \dot{x} = 0 \text{ и } P < -F_0 \\ -F_0, \text{ при } \dot{x} = 0 \text{ и } P < F_0 \\ P \quad \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |P| \leq F_0 \end{cases} \quad (3)$$

Момент сопротивления на валу ГУ

$$M_{сз} = M_{ТГ} + M_{СМ} \quad (4)$$

Где $M_{ТГ}$ – момент сил трения в подшипниках гидромотора и в зеркале распределительного механизма; $M_{СМ}$ – приведенный к валу гидромотора момент сил полезного сопротивления [2]. Определяется как момент в упругой связи между выходным валом ГУ и первым инерционным звеном приведенной механической системы,

$$M_{СМ} = C_{о\epsilon} \int_0^t C(\Omega_{ГУ} - \Omega_1) dt + \beta_{01}(\Omega_{ГУ} - \Omega_1) \quad (5)$$

Анализом конкретных конструктивных форм механической части привода была установлена возможность представления ее в виде четыре массовой системы с зазорами и силой трения без смазки F_{TM} , приложенной к конечному звену. Идентификацию и оценку адекватности модели проводили путем моделирования МШБ с параметрами, соответствующими параметрам экспериментального стенда, и сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными. В частности, момент инерции ротора ШБ вместе с присоединенными к нему деталями на экспериментальном стенде был равен $1,6 \cdot 10^{-6} \text{ кгс} \cdot \text{м} / \text{с}^2$, а коэффициент демпфирования $\rho = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ кгс} \cdot \text{м} / \text{с}^2$. Экспериментально измеренная длительность электромагнитного переходного процесса составляла 0,002 с и, следовательно, такую же длительность имели управляющие импульсы.

Заключение. Вследствие высокой степени совпадения результатов моделирования ГУ с данными экспериментов его математическая модель в предложенном виде признана адекватной и используется для дальнейших динамических расчетов. Точно так же сравнением результатов моделирования и эксперимента была установлена адекватность модели механической системы привода, упрощенной до трехмассовой системы с одним зазором. Таким образом, была установлена адекватность полной модели МШБ и ее отдельных элементов оригиналам, и эта модель служит базой для полного динамического расчета МШБ.

Литература

1. Абдуллаев Г.С. Математические модели процессов сварки трения бурильных труб. / Материалы III республиканский научно-технической конференции, 15-16 декабр 2016.- 214 с.
2. Абдуллаев Г.С. Автоматическое регулирование температуры гидросистемы шагающих балки в нагревательных печах. // Научные известия СГУ №2.- Сумгаит 2014.- Ст. 89-91.

Математическая модель смещения в зоне стыка бурильных труб

Г.С. Абдуллаев, Н.И. Мустафаева

Сумгаит, Сумгаитский государственный университет

E-mail: Abdullayev.qs@bk.ru

Процесс инерционной сварки трением практически исключает возможность появления случайных дефектов. Сварной шов, образованный в результате вращения иковки, не содержит газовых полостей, шлаковых включений и других аналогичных дефектов, которые обычно определяются при помощи рентгеновской и ультразвуковой аппаратуры. Контроль усадки может производиться при помощи специальной оснастки, хотя, как правило, ручное измерение на месте сварки является вполне достаточным. Определяющим фактором эффективности контроля за усадкой является хорошая воспроизводимость, присущая процессу инерционной сварки трением. Скорость и осевое усилие можно регулировать с большой точностью. В результате этого величине усадки поддерживается в пределах плюс-минус 5% от ее номинальной величины, определенной в ходе проведения пробных сварок для выработки оптимальных параметров БТ. В таком случае модель механики сварки трением представляется в виде математических моделей объектов типа цепей, простых циклов и сети, для которых разработаны эффективные методы анализа [1]. Смещение локальной системы координат S_i (i -го звена) относительно системы S_{i-1} (i -го звена) независимо от физической природы процессов, происходящих, в обобщенном стыке сварного шва БТ, можно представить, будут различными для номинальных относительных перемещений \bar{r}_i , обусловленных кинематической связью, и самых относительных смещений \bar{d}_{ri} , обусловленных возмущениями, действующими в системе. Так, согласно работе [2] $\bar{r}_{i-1} = A_{i-1,i}(q_i)\bar{r}_i$, где $A_{i-1,i}(q_i)$ - матрица, содержащая только одну переменную (q_i); соответствующую либо поступательному перемещению

x_i, y_i, z_i системы S_i вдоль одной из осей X, Y, Z системы S_{i-1} , либо повороту $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ системы S_i относительно одной из осей X, Y, Z .

Рассмотрим с начала простейшую ФС представляемую функции формообразования (ФФ) следующего вида [2]

$$\bar{r}_0 = \prod_{i=1}^{\ell} A_{i-1}, i^{\bar{r}} \ell \quad (1)$$

После подстановки в уравнение (1) соответствующих выражений $q_i = q_i(\tau)$ (здесь τ -текущее время) получим следующее уравнение для определения поверхности расточка сварного шов БТ, которая представлять собой след формообразующих точек режущего инструмента [2].

$$\bar{r}_0 = \begin{cases} \bar{r}_{рез}(u, \tau) - \text{при} - \text{формообразовании} - \text{линией} (\text{лезвием}) \\ r_{рез}(u, v, \tau) - \text{при} - \text{формообразовании} - \text{поверхностью} \end{cases} \quad (2)$$

Где $\bar{r}_{рез}$ – радиус-вектор поверхности координаты этой поверхности.

С точки зрения теоретической механики, уровне (2) представляет собой интеграл явно зависит от времени, то ФФ.

Описывает движение реальной механической системы [3], для которой малые относительные смещения.

$$\bar{d}_{ro} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{\mu=1}^6 \frac{\partial r_{ro}}{\partial q_i^{\mu}} \downarrow_{\tau=\tau_0} dq_i^{\mu} + \frac{\partial r_{ro}}{\partial \tau} \downarrow q_i^{\mu} = q_0 d\tau \right) \quad (3)$$

Где q_i^{μ} -независимые переменные перемещения и повороты системы S_i относительно системы

$$S_{i-1} (M = X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma)$$

Первый член в выражении (3)- это сумма виртуальных смещений. Передаточная матрица (матрица приведения смещений в зона стыка сварною шови БТ) обобщенного стыка имеет следующий вид:

$$G_i = \left(A_{o,i-1} D_i^x A_i l \bar{r}_i, \dots, A_{o,i-1} D_i^y A_i l \bar{r}_i \right) \quad (4)$$

Где D_i^u -матрица частных производных [2].

Производная перемещения по времени в каждом подвижном стыке БТ,Ю приведенная в зону переточки.

$$\bar{V}_i = q_i \cdot A_{o,i-1} D_i^u A_i, l\bar{r}_i \quad (5)$$

Где $q_i = d_{q_i} / d\tau$ -скорость перемещения в i -м стыке вдоль соответствующей координаты. Вектор-столбец dR_i дифференциалов, характеризующих малое смещение (dx, dy, dz) и поворот $(d\alpha, d\beta, d\gamma)$ системы S_i относительно системы

$$S_{i-1} \text{ в виде } d\bar{R}_i = (dx_i, dy_i, dz_i, d\alpha_i, d\beta_i, d\gamma_i)^T \quad (6)$$

Используя введенные обозначения (4)-(6) запишем выражение (3) в

$$\text{следующем виде: } d\bar{r}_o = \sum_{I=1}^{\ell} G_i d\bar{R}_i + \sum_{i=1}^{\ell} \bar{V}_i d\tau \quad (7)$$

Здесь и ниже в дифференциальных соотношениях используются той (нулевой) строкой. Так как число подвижных стыков меньше ℓ , то часть производных $\bar{V}_i \equiv 0$. Независимо от этого для удобства записи уравнений будем считать, что все производные существуют. Уравнение (7) выражает соотношения между смещения стыках зоне расточка ($d\bar{r}_o$) и относительными смещениями звеньев в стыках (dR_i) с учетом (7). Причем коэффициенты G_i и V_i являются функциями компоновки машина сварка трения и принятых законов формообразования, т.е. законов перемещения в подвижных стыках БТ. При формообразовании происходит нескольких БТ который сопровождается возникновением динамической составляющей P силы резания. Причем изменение последней связано с изменением относительного положения инструмента и заготовки выражениями вида [4]

$$d\bar{p} = W_{рез}^p d\bar{r}_o \quad (8)$$

$$d\bar{p} = W_{рез} dR_o \quad (9)$$

Где $W_{рез} = W_{рез}^p \Gamma$ и $W_{рез}^p = W_{рез} = W_{рез} \Gamma^+$ -динамические характеристики процесса резания; Γ - матрица размера 3×6 ; Γ^+ -псевдо обратная матрица для Γ размера

6x3 [4]: $d\bar{R}_0$ -вектор- столбец, характеризующий малые смещения в зоне расточка . В работе [4] показано, что выражения для расчета $W_{рез}$ и $W_{рез}^p$ могут быть получены при заданной зависимости силы P от геометрических и кинематических параметров процесса резания также на основе ФФ. Умножим обе части уравнения (7) на $W_{рез}^p$ и с учетом выражения (8) получим

$$d\bar{p} = \sum_{i=1}^{\ell} W_{рез}^p G_i \bar{dR}_i W_{рез}^p \bar{V}_i d\tau \quad (10)$$

Включение в рассмотрение рабочего процесса, характеризуемого динамической составляющей сила резания, привело к замыканию ФС машин сварка трением. Соответственно математическая модель ФС, предназначенная для описания ее движения с учетом сил, возникающих в рабочем процессе. Для этого обозначим зону расточка в каждой ФФ как нулевой стык БТ, а так как $d\bar{r}_0 = \Gamma d\bar{R}_0$, в качестве передаточной матрицы используем матрицу $G_0 = -\Gamma$. Соответственно уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{\ell} G_i \bar{dR}_i + \sum_{i=0}^{\ell} \bar{V}_i d\tau = 0 \quad (11)$$

Введенные обозначения позволяют записывать уравнения типов (1) и (7) в любой удобной системе координат и использовать для их решения методы.

Выводы: Изложенный подход позволяет единым образом представить все зоны (стыки БТ) взаимодействия ФС, т.е. сделать их равнозначными на этапах составления и анализ математической модели смещения стыки БТ на машине сварки трения. Параметры сварки (скорость, осевое усилие и инерция) могут быть получены расчетный путем. Для определения оптимальных режимов сварки необходимо проведение нескольких пробных сварок. Факторы, которые необходимо учитывать при определении оптимальных параметров, включают в себя следующая зона сварки должна получать равномерный нагрев; -усадка должна быть минимальной;- утолщение должно быть оптимальным ; - твердость сварного шва должна быть минимальной; -следует учитывать характер поверхностей свариваемых деталей и т.д. 1. Таким образом, способ

инерционной сварка трением освоен мировой практикой и получил широкое применение в промышленности для сварки различных деталей и конструкций, в том числе и ответственного назначения.

2. Применение инерционного способа сварки трением, как и обычной "русской" сварки трением, при производстве бурильных труб с приварными замками гарантирует высокое качество сварных соединений.

Литература

1. Sheth P.N., Hodges T.M., Vickers J.J. Matrix analysis method from direct and multiple contact multibody systems // Journal of Mechanical Design.-1990-June-V.112.P.145-152.

2. Абдуллаев Г.С «Гибкие автоматизированные производства в нечеткой среде» Баку –издательство «ЭЛМ» 2005 г.163 стр.

3. Абдуллаев Г.С. Моделирование и управление гибким автоматизированным производством бурильных труб с применением нечетких систем. // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. Москва,2004, №2, с.18-20.

УДК 517.946

Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду четвертого порядка

Э.И. Абдурагимов, Т.Ю. Гаджиева, П.К. Магомедова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Достаточно большое количество работ российских и зарубежных математиков (см. [1-10] и др.) посвящены исследованиям положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. Большинство из них рассматривают вопросы существования положительного решения, его поведения, асимптотики и др.. Данная работа посвящена разработке численного метода построения положительного решения в случае двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду.

Рассмотрим семейство двухточечных краевых задач:

$$y_i^{(4)} + x^m |y_i|^n = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y_i(0) = y_i''(0) = y_i'''(0) = 0, \quad (2)$$

$$y_i^{(i)}(1) = 0, i = 0,1, \quad (3)$$

где $m \geq 0, n > 1$ - константы. Очевидно, что $y_i = 0$ - тривиальное решение задачи (1)-(3). Под *положительным решением* задачи (1)-(3) понимается функция $y_i \in C^4[0,1]$ положительная при $x \in (0,1)$, удовлетворяющая уравнению (1) и граничным условиям (2)-(3).

Для численного построения положительного решения, следуя Ц.На [12], вводим линейную группу преобразований

$$\begin{cases} x = A_i^\alpha \bar{x}, \\ y_i = A_i^\beta \bar{y}_i, i = 0,1, \end{cases} \quad (4)$$

где α, β - это константы, подлежащие определению, A_i - положительный параметр преобразования (недостающее начальное условие в (1) - (3), т.

е. $y_i'(0) = A_i$), позволяющую нам привести исходную задачу к задаче Коши:

$$v^{(4)} + \bar{x}^m v^n = 0, \quad (5)$$

$$v(0) = v''(0) = v'''(0) = 0, \quad (6)$$

$$v'(0) = 1, \quad (7)$$

где $v = \bar{y}_i(\bar{x}), i = 0,1$.

Установлено, что $\alpha = -\frac{n-1}{m+n+3}, \beta = \frac{m+4}{m+n+3}$. А параметр преобразования

определяется по формуле: $A_i = (\bar{x}_i)^{-\frac{1}{\alpha}}, i = 0,1$.

Решаем задачу (5)-(7) каким-либо численным методом, например, методом Рунге-Кутты четвертого порядка, начиная с $\bar{x} = 0$ до тех пор, пока не выполнится равенство $\bar{y}_i^{(i)}(\bar{x}_i) = 0, i = 0,1$; затем вычисляем значение параметра A_i и мы находим решение по формулам (4).

Литература

1. Ying He. Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems, *Advances in Pure Mathematics*, №4, 480-486 (2014).

2. Liu Y. Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations, *Advances Mathematics Letters*, №17, 747-757 (2004).
3. Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения. // *Вестник Самарского государственного университета*, 2010, №2(76), с. 5-12.
4. Абдурагимов Э.И., Гаджиева Т.Ю., Магомедова П.К. Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного оду четвертого порядка // *Вестник ДГУ, Махачкала*, вып. 6, 2015. с. 85-92.
5. Абдурагимов Э.И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка. // *Вестник СамГУ*, 2014, № 10(121). С.9-16.
6. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. // *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1982, v. 4. p.525-598.
7. Ma, R, Yang, B, Wang, Z. Positive periodic solutions of first-order delay differential equations with impulses. // *Appl. Math. Comput.*, 2013, № 219, p.6074-6083.
8. Гапоненко Ю.Л. О положительных решениях нелинейных краевых задач. // *Вестник Московского университета*, серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1983, № 4, с. 8-12.
9. Feng, M. Existence of symmetric positive solutions for a boundary value problem with integral boundary conditions. // *Appl. Math. Lett.*, 2011, № 24, p. 1419-1427.
10. Cabada A. and Enguiça R. R. Positive solutions of fourth order problems with clamped beam boundary conditions. // *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*. 2011, vol. 74, № 10, p. 3112–3122.
11. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М., 1962. 394с.

12. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач.
М.: Мир, 1982, 296с.

УДК 538.9, 517.95, 517.51

Эффекты первичной анизотропии при росте поверхности твёрдого тела с цилиндрической образующей

А.М. Агаларов¹, Т.А. Гаджимурадов¹, А.А. Потапов², А.Э. Рассадин³

¹Институт физики им. Х.И. Амиханова ДНЦ РАН

²Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

³Нижегородское математическое общество

При описании напыления вещества на поверхность твёрдого тела часто используется уравнение Кардара-Паризи-Цванга, выведенное в предположении о постоянстве скорости роста поверхности по локальной нормали к ней (см. [1] и ссылки там). Однако часто необходимо учитывать анизотропию скорости этого роста.

Анизотропный рост поверхности $z(x, t)$ с цилиндрической образующей описывается уравнениями (см. [2] и ссылки там):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{V(\theta)}{\cos \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -tg\theta, \quad (1)$$

где θ — угол между локальной нормалью к поверхности и осью координат, направленной в сторону её роста, а $V(\theta)$ — скорость её роста, связанная с интенсивностью $D(\theta)$ потока осаждающихся на рассматриваемую поверхность частиц следующим образом:

$$V(\theta) = \int_{\theta_-(\theta)}^{\theta_+(\theta)} D(\theta') \cdot \cos(\theta - \theta') \cdot d\theta', \quad (2)$$

где пределы интегрирования при отсутствии затенения дальними участками поверхности $z(x, t)$ равны:

$$\theta_-(\theta) = \begin{cases} \theta - \pi/2, & \theta > 0 \\ -\pi/2, & \theta < 0 \end{cases}, \quad \theta_+(\theta) = \begin{cases} \pi/2, & \theta > 0 \\ \pi/2 + \theta, & \theta < 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Эффекты первичной анизотропии роста поверхности будут учтены при выборе интенсивности потока в виде:

$$D(\theta) = D_0 + D_1 \cdot \sin \theta, \quad D_0 > |D_1| > 0. \quad (4)$$

Комбинируя формулы (2)-(4), получим для скорости роста поверхности:

$$V(\theta) = D_0 \cdot (1 + \cos \theta) + \frac{D_1 \cdot \sin \theta}{2} \cdot (\pi - \theta \cdot \text{sign} \theta), \quad (5)$$

где $\text{sign} \theta = \begin{cases} +1, & \theta > 0 \\ -1, & \theta < 0 \end{cases}$, и, соответственно, как следствие системы (1) получим

следующее обобщение уравнения Кардара-Паризи-Цванга:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D_0 \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} \right] - \frac{D_1}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left[\pi - \arctg \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right]. \quad (6)$$

Уравнение (6) необходимо дополнить начальным условием:

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in R. \quad (7)$$

В приближении малых углов, т.е. когда $|\partial z / \partial x| \ll 1$, после исключения из рассмотрения однородного роста согласно $z(x,t) = 2 \cdot D_0 \cdot t + h(x,t)$ с помощью введения новой функции $h(x,t)$ получим для этой последней задачу Коши на всей вещественной оси вида:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\pi \cdot D_1}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \left[D_0 + D_1 \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2, \quad h(x,0) = z_0(x). \quad (8)$$

Её решение до момента наступления градиентной катастрофы может быть построено методом характеристик, а именно, для случая $\partial h / \partial x > 0$:

$$x = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot t}{2} + y - z'_0(y) \cdot (D_0 + D_1) \cdot t \quad h = z_0(y) - [z'_0(y)]^2 \cdot \frac{(D_0 + D_1) \cdot t}{2} \quad (9)$$

и для случая $\partial h / \partial x < 0$:

$$x = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot t}{2} + y - z'_0(y) \cdot (D_0 - D_1) \cdot t \quad h = z_0(y) - [z'_0(y)]^2 \cdot \frac{(D_0 - D_1) \cdot t}{2}. \quad (10)$$

В докладе рассмотрено поведение решений (9) и (10) уравнения (8) для начального условия:

$$z_0(x) = \frac{A}{1 + (x/L)^2}, \quad (11)$$

имеющего участки как с положительной, так и с отрицательной производной. Возможность использования фрактальных начальных условий также обсуждена.

Литература

1. Куликов Д.А., Потапов А.А., Рассадин А.Э. Моделирование роста фрактальных структур на поверхности твёрдых тел с гексагональной и кубической симметрией // Сборник трудов X Научно-практического семинара «Актуальные проблемы физики конденсированных сред. К 110-летию Х. И. Амирханова» (Махачкала, 6-9 июня 2017 г.). — Махачкала: 2017. С. 56-57.
2. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с.: ил.

УДК 530.1

Edge states and solitons in quantum Hall and Chern-Simons fields

A M Agalarov¹, T A Gadzhimuradov¹, A A Potapov^{2,3} and A E Rassadin⁴
*aglarow@mail.ru

¹Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Dagestan Scientific Centre,

Russian Academy of Science, 367003, 94, M. Yaragyski st., Makhachkala, Russia

²Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, 11-7,
 Mokhovaya st.,
 125009, Moscow, Russia

³ Joint-Lab. of JNU-IREE RAS, JiNan University, China

⁴Nizhny Novgorod Mathematical Society, 23, Gagarin av., Nizhny Novgorod,
 603950, Russia

The (2+1)D matter particles interacting with gauge topological Chern-Simons fields support solitons solutions. Solitons are a central paradigm in many branches of present-day physics and mathematics. One of most interesting combination of the quantum and nonlinear properties of solitons arises in the (2+1)D-nonlinear Schrodinger equation gauged by a Chern-Simons fields (Jackiw-Pi model) [1-3]. The model of Jackiw and Pi is described by the (2+1)D –action

$$S = \int \left(\frac{1}{\kappa} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho + i\hbar \psi^* D_t \psi - \frac{\hbar^2}{2m} |D_i \psi|^2 - V(\rho) \right) d^3x, \quad (1)$$

where $\psi \in C$ is the Schrodinger quantum field, giving rise to charged bosonic particles after second quantization. A_μ is the Chern-Simons gauge field, $V(\rho)$ is the self-interaction potential of charged particles, $\rho = \psi^* \psi$ is the particle density and $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ ($\mu=0,1,2$) is the covariant derivative. The metric tensor is $g^{\mu\nu}=(1,-1,-1)$ and $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ is the Levi-Civita anti-symmetric symbol.

In context of the Landay-Ginzburg mean field theory the Langrange density of model (1) can be considered as the model to describe the *edge states* (chiral solitons) of the Integer Quantum Hall Effects in monolayer systems [4]. In this case the scalar field ψ is the order parameter and the constant $\bar{\kappa}$ is interpreted as the Hall conductivity. As know [1,4] in the multi-layer systems to take place the Fractional Quantum Hall Effect due to inter-layer correlations of interacting anyons – the planar particles with unconventional statistics. So that it is interesting the extension of the theory (1) to the multi-component case of matter field: $\psi \rightarrow \psi_j$ ($j=1,2,\dots,N$).

In this Letter, we consider a multi-component generalization of the Jackiw-Pi models (1). As the (2+1)D-second-order field equations associated to (1) are not integrable ,it is natural to consider a dimensional reduction $L_{(2+1)D} \rightarrow L_{(1+1)D}$. After such reduction procedure the (1+1)D multi-component Lagrangian is given by

$$L_{(1+1)D} = \int dx \sum_{j=1}^N (i\hbar \bar{\psi}_j \partial_t \psi_j - H_j - V), \quad (2)$$

$$H_j = \hbar^2 / 2m \bar{\Pi}_j \Pi_j, \quad \Pi_j = (\partial_x \pm i\kappa^2 \sum_k^N \rho_k) \psi_j, \quad \rho_k = \bar{\psi}_k \psi_k.$$

So the Euler-Lagrange equation reads

$$(i\partial_\tau + D_\zeta^2 - g\kappa^2 \sum_k^N J_k) \psi_j = \partial V / \partial \bar{\psi}_j \quad (3)$$

Here $\tau = \hbar^{-1}t$ and $\zeta = x(\hbar^2 / 2m)^{-1/2}$ is the normalized time and space variables,

$D_\zeta = \partial_\zeta + ig\kappa^2 \rho$ is the gauge covariant derivative, $\kappa = (\hbar^2 / mc)\bar{\kappa}$ is the Hall dimensionless constant. The particle density $\rho = \sum_k^N \rho_k$ and the total current

$J = \sum_k^N J_k$, where $J_k = \frac{1}{2i}(\bar{\psi}_k D_\zeta \psi_k - \psi_k (\bar{D}_\zeta \bar{\psi}_k))$, satisfy the *continuity equation*: $\rho_{,\tau} + J_{,\zeta} = 0$. Jackiw and Pi found that the dynamics of model (1) is not Lorentz-invariant[2-4]. Also it is not Galileo-invariant. Another interesting fact is the nontrivial gauge analogy between (1+1)D multi-component model (2) and standard Nonlinear Schrodinger equations with SU(m,n) group symmetry[5]. A simple analysis allows us to describe an exact solution for system Eqs. (3).

We present an exact solutions – the gauge *chiral* vector solitons. We obtain one unexpected result - the nontrivial property of this two-component chiral solitons is *NO-scattering* on a line.

- [1] Yu.M. Bunkov and G.E.Volovik, Phys.Rev.Lett.,**98**, 265302 (2007)
- [2] R.Jackiw and S.Y.Pi, Prog.Theor.Phys.Suppl. **107**, 1 (1992)
- [3] U.Aglietti et al Phys.Rev.Lett. **77**, 4406 (1998)
- [4] K.Moon et al Phys.Rev. **B51**, 5138 (1995)
- [5] A.M. Agalarov and R.M. Magomedmirzaev, JETP Letters, **76**, 14(2002)
- [6] D. Leykam et al, Phys.Rev.Lett.**118**, 040401(2017)
- [7] L. Faddeev and R. Jackiw, Phys.Rev.Lett.**60**,1692(1988)

УДК 517.929

**Проверка условий существования решений ФДУ второго порядка
исчезающих на полуоси на конкретном примере**

Х. И. Аджиева

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Проверены условия существования решений ФДУ второго порядка для обыкновенного дифференциального уравнения вида $u''(t) + au(t) = f(t)$, где $e^{\alpha t} f(t) \in L_2(\mathbb{R}), X = Y = \mathbb{R}, Y_R^{0,\alpha} = L_2(\mathbb{R})$ с весом $e^{2\alpha t}$.

Предварительно введем некоторые вспомогательные обозначения и понятия.

X, Y -гильбертовы пространства, $X \subset Y, \|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$.

$X_{\Delta}^{2,\alpha}$ -пополнение множества функций $u(t), u(t) = 0, t \leq t_0$, с компактными носителями из X , имеющих почти всюду сильно непрерывные производные $u''(t)$ в Y по норме

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) (\|u(t)\|_X^2 + \|u'(t)\|_X^2 + \|u''(t)\|_Y^2) dt \right)^{1/2},$$

$\alpha = \text{const} \in R$

$Y_{\Delta}^{0,\alpha}$ -пополнение множества сильно непрерывных функций $u(t), u(t) = 0, t \leq t_0$, с компактными носителями из Y по норме

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) (\|u(t)\|_Y^2) dt \right)^{1/2},$$

$$\Delta \equiv (t_0, +\infty).$$

$L_0(X, Y)$ –множество линейных замкнутых операторов из X в Y .

$L_{\infty}(X, Y)$ –множество линейных вполне непрерывных операторов из X в Y .

$L^2(\Delta, X)$ –пополнение множества сильно непрерывных функций с компактными носителями и со значениями в X по норме

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} (\|u(t)\|_X^2) dt \right)^{1/2}.$$

Носителем определенной и непрерывной на открытом множестве, $G \subset R$ функции $u(t)$ называется множество $\overline{\{t: u(t) \neq 0\}} \cap G$.

$L_2(I)$ –пространство суммируемых с квадратом на множестве $I \subset R$ скалярных функций.

$$L_0 \equiv D_t^2 - \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t) S_{h_{kj}(t)} D_t^k, h_{00}(t) \equiv h_{10} = 0.$$

$$S_{h_{kj}(t)} u(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t - h_{kj}(t)).$$

$$D_t^k \equiv \frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k}{dt^k}.$$

HJ -множество абсолютно непрерывных в $I \subset R$ скалярных функций $h(t)$, у которых в точках существования производной $h'(t) \leq r \leq 1, t \in I$.

$A_{kj}(t)$ -неограниченные операторные коэффициенты, область определения которых принадлежит X , а область значений- Y .

Доказаны

Теорема [1]:

Пусть выполнены условия:

а) $A_{kj}(t) \in L_\infty(X, Y), j \geq 1, k = 0, 1, A_{kj}(t)$ сильно непрерывны по $t \in \Delta, j \geq 0, k = 0, 1;$

б) резольвенты $R_0(\lambda, t)$ регулярны, $\| \lambda R_0(\lambda, t) \|_X = O(1), \| \lambda^2 R_0(\lambda, t) \|_Y = O(1), Im \lambda \leq \alpha, t \geq t_0, |\lambda| \rightarrow \infty;$

в) $f(t) \in Y_\Delta^{0, \alpha}$, при любом компактном $\Delta_1 \subset \Delta, h_{kj}(t) \in HR, h_{kj}(t) \geq 0, h_{kj}(t)$ равномерно непрерывно зависят от $t \in \Delta, j \geq 1, k = 0, 1.$

Тогда уравнение $L_0 u(t) = f(t)$ имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u^{(k)}(t) = 0$ при $t \leq t_0, k = 0, 1.$

Лемма [2]

Если $u(t) \in X_\Delta^{2, \alpha}$ и $u(t), u'(t)$ -непрерывны, то $e^{\alpha t} (\|u(t)\|_Y + \|u'(t)\|_Y) \leq C$ для $t > t_0,$ где C зависит от $\alpha, u(t), u'(t).$

Рассмотрим пример обыкновенного дифференциального уравнения

$u''(t) + au(t) = f(t)$, где $e^{\alpha t} f(t) \in L_2(R), X = Y = R, Y_R^{0, \alpha} = L_2(R)$ с весом $e^{2\alpha t}$, резольвента $R_p(\lambda) \equiv (-\lambda^2 + a)^{-1}$ имеет два полюса $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a} \text{Im} \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a}$, если $a < 0$ и $\text{Im} \lambda_{1,2} = 0$, если $a > 0$.

Из равенств

$$\|R_p(\lambda)\|_X = \left| \frac{1}{-\lambda^2 + a} \right| = \frac{1}{|\sigma^2 - \alpha^2 + 2i\sigma\alpha - a|} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 - \alpha^2 - a)^2 + 4\sigma^2\alpha^2}} \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$|\sigma| \rightarrow \infty, |\alpha| \leq C,$$

$$\|\lambda R_p(\lambda)\|_X = \left| \frac{\lambda}{-\lambda^2 + a} \right| = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2}}{\sqrt{(\sigma^2 - \alpha^2 - a)^2 + 4\sigma^2\alpha^2}} \rightarrow 0 \text{ при}$$

$$|\sigma| \rightarrow \infty, |\alpha| \leq C,$$

$$\|\lambda^2 R_p(\lambda)\|_X = \left| \frac{\lambda^2}{-\lambda^2 + a} \right| = \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{\sqrt{(\sigma^2 - \alpha^2 - a)^2 + 4\sigma^2\alpha^2}} \rightarrow 1 \text{ при}$$

$|\sigma| \rightarrow \infty, |\alpha| \leq C,$ следуют условия на резольвенту, указанные в теореме [1].

1. Полагая для простоты, в рассматриваемом уравнении, $a = -1$ в случае $a < 0$, имеем уравнение

$$u''(t) - u(t) = f(t). \quad (1)$$

Для этого уравнения показано, что

- 1) если $\alpha \neq \pm 1$, то существует единственное решение $u(t)$ уравнения (1), принадлежащее $L_2(\mathbb{R})$ с весом $e^{2\alpha t}$ вместе со своими производными первого и второго порядков.
- 2) если $\alpha < -1$ и $f(t) = 0, t \leq t_0$, то существует единственное решение $u(t)$ уравнения (1), принадлежащее $L_2(\Delta)$ с весом $e^{2\alpha t}$ вместе со своими производными первого и второго порядков и обладающее свойством $u(t) = 0, t \leq t_0$.
- 3) если $\alpha = \pm 1$, то не имеет место утверждение теоремы [1] для уравнения (1).

2. В случае $\alpha > 0$ для простоты положим, что $\alpha = 1$, тогда наше уравнение примет вид

$$u''(t) + u(t) = f(t). \quad (2)$$

Для этого уравнения показано, что $\forall \alpha \neq 0$ уравнение (2) имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее $L_2(\mathbb{R})$ с весом $e^{2\alpha t}$ вместе со своими производными первого и второго порядка.

Литература

1. Дыдымова Х.И. О разрешимости уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве //Наука и социальный прогресс Дагестана.1997.-С. 66-70.
2. Дыдымова Х.И. О разрешимости ФДУ второго порядка в гильбертовом пространстве //ФДУ и их приложения (выпуск 3).1997.- С. 93-107.

УДК 517.929

Асимптотика решений ФДУ первого порядка в гильбертовом пространстве со степенным весом

С.М. Алейдаров

Махачкала, Дагестанский государственный университет

В статье получена асимптотика решений ФДУ с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве со степенным весом.

The asymptotic of the solutions of the FDE with unlimited operator coefficients in Hilbert space with the degree weight off has received in the article.

В статье изучается асимптотическое поведение решений уравнения

$$D_t u(t) - \sum_{j=0}^m [A_j + A_j(t)] u(t - h_j - h_j(t)) = f(t) \quad (1)$$

с неограниченными операторными коэффициентами $A_j, A_j(t): Y \rightarrow Y$, $D(A_j) = D(A_j(t)) = X$, где X, Y - гильбертовы пространства, $X \subset Y$, $\|u\|_X \geq \|u\|_Y$, $u \in X$, $h_0 = h_0(t) \equiv 0$, $h_j(t) \in H(t_0, \infty)$.

Пополнение множества функций $u(t)$, $u(t) = 0$, $t \leq t_0$, с компактными носителями и со значениями в X , имеющих сильно непрерывные производные в Y по норме

$$\|u(t)\|_{(t_0, \infty)}^{1,n} = \left(\int_{t_0}^{+\infty} (1 + t^{2n}) (\|u(t)\|_X^2 + \|u'(t)\|_Y^2) dt \right)^{1/2}$$

обозначим через $X_{(t_0, \infty)}^{1,n}$.

Пополнение множества сильно непрерывных функций $f(t)$, $t \leq t_0$ с компактными носителями и со значениями в Y по норме

$$\|f(t)\|_{(t_0, \infty)}^{0,n} = \left(\int_{t_0}^{+\infty} (1 + t^{2n}) \|f(t)\|_Y^2 dt \right)^{1/2}$$

обозначим через $Y_{(t_0, \infty)}^{0,n}$.

Изучим однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$D_t u(t) - \sum_{j=0}^m A_j u(t - h_j) = 0. \quad (2)$$

Если применить преобразование Фурье к уравнению (2), то получим

$$\left(\lambda E - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda h_j} \right) \tilde{u}(\lambda) = 0.$$

В случае обратимости оператора

$$L(\lambda) \equiv \lambda E - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda h_j}$$

уравнение (2) имеет только нулевое решение. Обратный оператор $L^{-1}(\lambda) = R(\lambda)$ назовем резольвентой. Изучим те значения λ , при которых оператор $L(\lambda)$ необратим.

Определение. Элемент $\varphi_0 \in X$, $\varphi_0 \neq 0$, удовлетворяющий условию

$$\lambda_0 \varphi_0 = \sum_{j=0}^m e^{-i\lambda_0 h_j} A_j \varphi_0$$

назовем собственным элементом оператора $L(\lambda)$, соответствующего собственному значению λ_0 .

Элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1} \in X$, удовлетворяющие соотношениям

$$L(\lambda_0) \varphi_k + L'(\lambda_0) \varphi_{k-1} + \dots + \frac{1}{k!} L^{(k)}(\lambda_0) \varphi_0, \quad k = 1, 2, \dots, s-1 \quad (3)$$

назовем присоединенными к собственному элементу φ_0 (s - кратность λ_0).

Лемма. Если λ_0 - s -кратный полюс резольвенты $R(\lambda)$, то функция

$$u_0(t) = e^{i\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(it)^{s-k-1}}{(s-k-1)!} \varphi_k,$$

где φ_0 - собственный элемент $L(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ_0 , а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1}$ - присоединенные элементы к φ_0 , являются решением однородного уравнения (2).

Доказательство. Подставляя $u_0(t)$ в уравнение (2) и собирая члены при одинаковых степенях t , получим

$$e^{i\lambda_0 t} \left[\lambda_0 \frac{(it)^{s-1}}{(s-1)!} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{s-1} (\lambda_0 \varphi_k + \varphi_{k-1}) \frac{(it)^{s-k-1}}{(s-k-1)!} \varphi_k - \right.$$

$$- \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda_0 h_j} \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{v=0}^{s-k-1} \frac{(it)^{s-k-v-1}}{(s-k-v-1)!} \frac{(-ih_j)^v}{v!} \varphi_k \Big] = 0,$$

$$\left(\lambda_0 \varphi_0 - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda_0 h_j} \right) \varphi_0 = 0,$$

$$\lambda_0 \varphi_1 + \varphi_0 - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda_0 h_j} \left(\frac{-ih_j}{1!} \varphi_0 + \varphi_1 \right) = 0,$$

$$\lambda_0 \varphi_2 + \varphi_1 - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda_0 h_j} \left(\frac{(-ih_j)^2}{2!} \varphi_0 + \frac{-ih_j}{1!} \varphi_1 + \varphi_2 \right) = 0,$$

.....

$$\lambda_0 \varphi_k + \varphi_{k-1} - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\lambda_0 h_j} \sum_{v=0}^k \frac{(-ih_j)^{k-v}}{(k-v)!} \varphi_v = 0,$$

$$e^{i\lambda_0 t} \left\{ \sum_{v=1}^{s-1} \frac{(it)^{s-v-1}}{(s-v-1)!} \left[L(\lambda_0) \varphi_0 + L'(\lambda_0) \varphi_{v-1} + \dots + \frac{1}{v!} L^{(v)}(\lambda_0) \varphi_0 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(it)^{s-1}}{(s-1)!} L(\lambda_0) \varphi_0 = 0.\right.$$

Из определения элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1}$ следует утверждение леммы.

Таким образом, у однородного уравнения (2) существуют ненулевые решения, связанные с полюсами резольвенты $R(\lambda)$ из некоторой горизонтальной полосы.

Изучим поведение решений уравнения (1) для достаточно больших t .

Теорема. Пусть выполнены условия:

а) $A_j : Y \rightarrow Y$ - замкнутые операторы,

$A_j : X \rightarrow Y$ - вполне непрерывные операторы,

$$\|A_j(t)u\|_Y \leq c \cdot \|u\|_X \quad \forall u \in X, \quad j = 1, \dots, m;$$

б) $R(\lambda)$ регулярна, $\|R^{(k)}(\lambda)\|_X = O(1)$, $\|\lambda R^{(k)}(\lambda)\|_Y = O(1)$ на прямых

$\text{Im} \lambda = 0, \text{Im} \lambda = a > 0, k = 0, 1, \dots, n;$

в) $R(\lambda)$ мероморфна в полосе $0 < \text{Im } \lambda < a$ и λ_k ($k = 1, 2, \dots, l$; $0 < \text{Im } \lambda_k < a$) - полюса $R(\lambda)$;

$$\text{г) } e^{at} f(t) \in Y_{(t_0, \infty)}^{0, n}, h_j(t) \in H(t_0, \infty),$$

$$\left| [t - h_j(t + h_j)]^{-1} \right| \leq c_1 |t| + c_2, \quad c_1, c_2 \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad t \geq t_0.$$

Тогда существует конечное число решений вида

$$u_k(t) = e^{i\lambda_k t} P_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

уравнения (2), где $P_k(t)$ - многочлен, степень которого на единицу меньше кратности полюса λ_k , что имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left\| t^n \left\| u(t) - \sum_{k=1}^l u_k(t) \right\|_X \right\|_{L_2(t_0, \infty)}^2 &\leq \\ &\leq c \cdot \int_{t_0}^{\infty} e^{2at} (1 + t^{2n}) (\|f(t)\|_Y^2 + \|u(t)\|_X^2) dt, \end{aligned}$$

для решений $u(t) \in X_{(t_0, \infty)}^{1, n}$, обладающих свойством

$$e^{at} \sqrt{1 + t^{2n}} \|u(t)\|_X \in L_2(t_0, \infty),$$

где постоянная c не зависит от решения $u(t)$.

Следовательно, имеет место асимптотическая формула для решения $u(t)$ функционально – дифференциального уравнения (1) типа

$$u(t) \rightarrow \sum_{k=1}^l u_k(t) + o(t^{-n}), \quad n \in N, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Литература

1. Алиев Р.Г. Об асимптотическом поведении решений уравнения с ОА в гильбертовом пространстве с экспоненциальным весом. Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, №3.

2. Алейдаров С.М. О функционально-дифференциальном уравнении в пространстве со степенным весом. Дифференциальные уравнения, 1986, т. 22, №12.

3. Алейдаров С.М. Асимптотика решений уравнения нейтрального типа. Вестник ДГУ. Естественные науки. Вып. 1. 2001.

Разрешимость ФДУ второго порядка с линейным отклонением аргумента

М. С. Алейдаров

Махачкала, Дагестанский государственный университет

В статье получены условия разрешимости и асимптотическая формула для всех решений уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве со степенным весом.

The solvability conditions and the asymptotic formula for all solutions of a second-order equation in a Hilbert space with a power weight

Рассмотрим уравнение

$$L u(t) \equiv D_t^2 u(t) - \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t) D_t^k u(a_{kj}t) = f(t), \quad (1)$$

где $A_{k0}(t) = A_{k0} = \text{const}$, $a_{k0} = 1$, $k = 0, 1$; $0 < a_{kj} < 1$, $j = \overline{1, m}$.

$A_{kj}(t): Y \rightarrow Y$ – замкнутые операторы,

$A_{kj}(t): X \rightarrow Y$ - ограниченные операторы,

$f(t) \in Y_R^{0,n}$, $u(t) \in X_R^{2,n}$.

Уравнение (1) перепишем в виде:

$$L_0 u(t) = (D_t^2 - A_{00} - A_{10} D_t) u(t) = f(t) + \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t) D_t^k u(a_{kj}t).$$

$$R(\lambda) \equiv (\lambda^2 E - A_{00} - \lambda A_{10})^{-1}.$$

Для уравнения

$$L u(t) \equiv D_t^2 u(t) - A_{10} D_t u(t) - A_{00} u(t) = \varphi(t), \quad (2)$$

имеет место теорема об однозначной разрешимости, если резольвента

$$R(\lambda) \equiv (\lambda^2 E - A_{00} - \lambda A_{10})^{-1} \text{ регулярна и } \|R^{(e)}(\lambda)\|_X = o(1),$$

$$\|\lambda R^{(e)}(\lambda)\|_X = o(1), \quad \|\lambda^2 R^{(e)}(\lambda)\|_Y = o(1) \text{ на прямой } \text{Im } \lambda = 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$e = 0, 1, 2, \dots, n$.

Для уравнения (2) имеет место следующая

Теорема 1.

Если резольвента $R(\lambda)$ регулярна, $\|R^{(e)}(\lambda)\|_X = O(1)$,

$$\|\lambda R^{(e)}(\lambda)\|_X = O(1), \quad \|\lambda^2 R^{(e)}(\lambda)\|_Y = O(1), \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad e = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$\|A_{kj}(t)\|_Y < \left(\|L_0^{-1}\|_Y \sqrt{2m \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m a_{kj}^{-2n-1}} \right)^{-1},$$

то уравнения (2) имеет единственное решение.

Имеет место следующая

Теорема 2.

Пусть выполнены условия:

- $A_{kj}(t): Y \rightarrow Y$ – замкнутые линейные операторы, $D(A_{kj}(t)) = X$ и не зависит от k, j и t ;
- $R(\lambda) \equiv (\lambda^2 E - A_{00} - \lambda A_{10})^{-1}$ регулярна, $\|R^{(k)}(\lambda)\|_X = O(1)$ на прямых $\text{Im } \lambda = 0, \text{Im } \lambda = a > 0, k = 0, 1, 2, \dots, n$;
- $R(\lambda)$ мероморфна в полосе $0 < \text{Im } \lambda < a$ и $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, e, 0 < \text{Im } \lambda < a)$ -полоса $R(\lambda)$;
- $\exp(at) f(t) \in Y_{(t_0, +\infty)}^{0,n}, \|A_{kj}(t)\|_Y \leq C_1 e^{-at}$.

Тогда существует конечное число решений $u_k(t)$ однородного уравнения $L_0 u(t) = 0$, то имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left\| t^n \left\| u(t) - \sum_{k=1}^n u_k(t) \right\|_X \right\|_{L_2}^2 &\leq \\ &\leq C_2 \left(\int_{t_0}^{\infty} (1 + t^{2n}) (e^{2at} \|f(t)\|_Y^2 + \|u(t)\|_X^2 + \|u'(t)\|_X^2) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_0+1} (1 + t^{2n}) e^{2at} \|u(t)\|_X^2 dt \right) \end{aligned}$$

для решений $u(t) \in X_{(t_0, \infty)}^{2,n}$ уравнения (1)

Доказательство. Пусть $\eta(t) \in C_0^\infty$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$, $0 \leq \eta'(t) \leq 1$,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ 1, & t \geq t_{0+1} \end{cases}$$

Тогда для функции $v(t) = \eta(t)u(t)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} Lv(t) &= \eta(t)D_t^2 u(t) + u(t)D_t^2 \eta(t) - 2\eta'(t)u'(t) \\ &- \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t)D_t^k \eta(a_{kj}t)u(a_{kj}t) - \eta(t) \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t)D_t^k u(a_{kj}t) \\ &+ \eta(t) \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t)D_t^k u(a_{kj}t) = \eta(t)f(t) + u(t)D_t^2 \eta(t) \\ &- \sum_{k=0}^1 \sum_{j=1}^m A_{kj}(t)[D_t^k \eta(a_{kj}t)u(a_{kj}t) - \eta(t)D_t^k u(a_{kj}t)] \equiv f_1(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$L_0(v(t)) = \eta(t)f(t) + u(t)D_t^2 \eta(t) - 2\eta'(t)u'(t) + \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t)D_t^k u(a_{kj}t) \equiv F(t).$$

Применяя к этому уравнению преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} \check{v}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \left\{ \eta(t)f(t) + u(t)D_t^2 \eta(t) - 2\eta'(t)u'(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m A_{kj}(t)\eta(t)D_t^k u(a_{kj}t) \right\} dt \equiv R(\lambda)\check{F}(\lambda). \end{aligned}$$

Преобразование Фурье финитной функции $D_t^k \eta(t)u(t)$ является целой функцией экспоненциального роста по теореме Пэли-Винера, $k=0,1$.

Преобразование Фурье функции $\eta(t)f(t)$ является регулярной функцией в полуплоскости $\text{Im } \lambda < a$, и в силу условий теоремы.

Докажем регулярность функций

$$f_{kj}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} A_{kj}(t) \eta(t) u(a_{kj}t) dt, j = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1.$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{df_{kj}(\lambda)}{d\lambda} \right\|_Y &\leq \int_{t_0}^{\infty} e^{jm\lambda t} \|A_{kj}(t)\|_Y \|u(a_{kj}t)\|_X dt = \\ &= \frac{1}{a_{kj}} \left(\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_0}^{\infty} (1+t^{2n}) \|u(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Значит, полюса $R(\lambda)$ и $\tilde{F}(\lambda)$ в полосе $0 < \text{Im } \lambda < a$ совпадают, причем $\|\tilde{v}(\lambda)\|_X \rightarrow 0$ равномерно в этой полосе при $|\lambda| \rightarrow \infty$

Отсюда и из леммы Римана-Лебега, следует, что

$$\int_x^{x+ia} e^{i\lambda t} \tilde{v}(\lambda) d\lambda \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Из теоремы Коши об интегралах по замкнутому контуру $\Gamma = \partial D$ следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma t - at} R(\sigma + ia) \tilde{F}(\sigma + ia) d\sigma = v(t) - i\sqrt{2\pi} \sum_{s=1}^e \text{res}_{\lambda_s} \{e^{i\lambda t} \tilde{v}(\lambda)\}.$$

По теореме Планшереля и условий b), c), d) имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \left\| v(t) - i\sqrt{2\pi} \sum_{s=1}^e \text{res}_{\lambda_s} \{e^{i\lambda t} \tilde{v}(\lambda)\} \right\|_X^2 dt &\leq e^{2at_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{v}^{(n)}(\sigma + ia)\|_X^2 d\sigma = \\ &= C \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \sum_{p=0}^h C_n^p R^{(n-p)}(\sigma + ia) \tilde{F}^{(p)}(\sigma + ia) \right\|_X^2 d\sigma \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \left(C_n^p \|R^{(n-p)}(\sigma + ia)\|_X \right)^2 \sum_{p=0}^n \|\tilde{F}^{(p)}(\sigma + ia)\|_Y^2 d\sigma \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^h \|\tilde{F}^{(p)}(\sigma + ia)\|_Y^2 d\sigma \leq C_1 \sum_{p=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{2at} \|F(t)\|_Y^2 dt \\
&\leq C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^{2n}) e^{2at} \left(\|D_t \eta(t) u(t)\|_Y + \|\eta(t) f(t)\|_Y \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m \|A_{kj}(t) \eta(t)\|_Y \|u(a_{kj} t)\|_X \right)^2 dt \leq \\
&\leq C_3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^{2n}) e^{2at} \|D_t \eta(t) u(t)\|_X^2 dt \right. \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^{2n}) e^{2at} \|\eta(t) f(t)\|_Y^2 dt \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^m \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^{2n}) e^{2at} \|A_{kj}(t) \eta(t)\|_Y^2 \|u(a_{kj} t)\|_X^2 dt \right) \leq \\
&C_4 \left(\int_{t_0}^{\infty} (1 + t^{2n}) (e^{2at} \|f(t)\|_Y^2 + \|u(t)\|_X^2) dt + \int_{t_0}^{t_0+1} (1 + t^{2n}) e^{2at} \|u(t)\|_X^2 dt \right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Алейдаров М.С., Алиев Р.Г.* Разрешимость ФДУ второго порядка в пространствах со степенным весом. // Вестник ДГУ. Естественные науки. Выпуск I. 2014. - с.109 - 116.

УДК 334+519.1

Алгоритм поиска кратчайших связей между предприятиями

П.Х. Алибеков, Р.М. Магомедова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

1. Введение

Пусть некоторая корпорация включает n предприятий, сведения о производственных связях предприятий заданы в базе данных и организованы в виде взвешенной сети:

1) каждому i -му предприятию соответствует вершина v_i сети $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E – множество связей;

2) стоимость устойчивого использования связи между предприятиями i и j задается целым положительным числом $l(v_i, v_j)$; равенство $l(v_i, v_j) = +\infty$ указывает на отсутствие «непосредственной» связи между предприятиями i и j .

Требуется найти кратчайший путь между двумя заданными предприятиями v_0 и v_k , другими словами, найти в сети G кратчайший по стоимости путь между вершинами v_0 и v_k .

В чем суть сформулированной задачи? Предположим, что в вычислительном центре корпорации решение задачи реализуется на компьютере, способном выполнить квадриллион (единица с 15 нулями) операций в сек. Даже при сравнительно небольшом значении n , например, $n = 100$, компьютеру для решения задачи переборным алгоритмом понадобится

$$99! / (1000000000000000 * 60 * 60 * 24 * 365) \text{ лет.}$$

Используя систему компьютерной математики Mathematica 10, найдем, что требуемое число лет исчисляется следующим астрономическим значением:
29593548783594670434328779444529014615270157364403101683343786115936580413
885691149461397760069925889857210147395745737649411850240000 (лет).
Другими словами, переборный алгоритм для решения нашей задачи неприменим.

2. Эффективный алгоритм поиска кратчайших путей

С другой стороны, если отказаться от переборного подхода и не рассмотреть хотя бы один путь P из всех путей, соединяющих вершины v_0 и v_k , то не исключено, что именно путь P окажется не только кратчайшим, но и единственным кратчайшим путем, соединяющим v_0 и v_k . На первый взгляд,

может показаться, что отсюда следует отсутствие у задачи неперечислимых решений.

Но такой вывод ошибочен, и эффективные алгоритмы для решения задачи о кратчайшем пути во взвешенном графе хорошо известны (см., например, [1]). Заметим, однако, что алгоритм Дейкстры, изложенный на с. 236 книги [1], вычисляет лишь кратчайшее расстояние, но не сам кратчайший путь. Мы предлагаем несложную модификацию этого алгоритма, которая: 1) обеспечивает вычисление как кратчайшего расстояния между вершинами, так и кратчайшего пути, соединяющего эти вершины, 2) содержит рекомендацию использовать для корректного вывода искомого пути структуру T типа «стек».

Кроме терминальных вершин v_0 и v_k , стека T , стоимостей $l(v_i, v_j)$ связей между парами вершин, приведенное ниже описание алгоритма использует следующие обозначения: расширяющееся множество вершин S , массив целочисленных меток D (смысл S и D – тот же, что в [1]) и массив вершин F (для v вершина $F[v]$ обозначает ту вершину, из которой непосредственно посещена вершина v).

Начало алгоритма

1. $S = \{v_0\}; D[v_0] = 0; F[v_0] = -1;$

2. Для каждого $v \in V - v_0$ выполнить:

$D[v] = l[v_0, v];$

3. Пока $v_k \notin S$, выполнить действия 3.1, 3.2 и 3.3:

{

3.1. выбрать вершину $w \in V - S$ с минимальным значением $D[w];$

3.2. включить w в $S;$

3.3. для каждого $v \in V$ выполнить:

если $D[v] > D[w] + l(w, v)$, то $\{D[v] = D[w] + l(w, v); F[v] = w;\}$

}

4. $v = v_k$; выбрать (пустой) стек T ;

выполнить действия 4.1 и 4.2:

4.1. включить вершину v в стек T ;

4.2. $v = F[v];$

пока $v \neq -1$.

5. Пока стек T не пуст, вывести элементы стека.

Вывести значение $D[v_k]$.

Конец алгоритма

Использование стека в последнем пункте алгоритма обеспечивает корректный вывод кратчайшего пути по направлению «от v_0 к v_k », длина этого пути задается значением $D[v_k]$.

3. Заключение

Вычислительная сложность сформулированного алгоритма равна $O(n^2)$ операций, поэтому в случае ситуации, описанной во Введении, потребуется менее одной миллисекунды времени.

Список литературы

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

УДК 517.9

**Разрешимость краевых задач для эллиптических
дифференциально-операторных уравнений второго порядка с
комплексным параметром и с линейным оператором в краевых условиях**

Б.А. Алиев

**Институт математики и механики НАН Азербайджана,
Азербайджанский государственный педагогический университет**

e-mail: aliyevbakhram@ yandex.ru

Аннотация

В данной работе в сепарабельном гильбертовом пространстве H изучается разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда один и тот же комплексный параметр участвует и в уравнении и в краевых условиях. В главной части рассматриваемой задачи граничные условия помимо комплексного параметра содержат и линейные операторы.

1. Введение. В данной статье в сепарабельном гильбертовом пространстве H , на конечном отрезке, исследуется разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда один и тот же комплексный параметр участвует, и в уравнении, и

в краевых условиях. Помимо комплексного параметра в главной части рассматриваемой задачи, граничные условия содержат линейные операторы. Отметим, что вопросы разрешимости краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнении второго порядка с комплексным параметром в уравнении и в граничных условиях изучены в работах [1]-[3] и других. Разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда одно из краевых условий содержит линейный неограниченный оператор, который подчинен в определенном смысле, главному оператору, участвующему в уравнении, изучено в работе [4].

2. Основные понятия и определения. Пусть E_1 и E_2 два банаховых пространства. Множество $E_1 + E_2$ всех векторов вида (u, v) , где $u \in E_1, v \in E_2$, с обычными координатно линейными операциями и с нормой

$$\|(u, v)\|_{E_1 + E_2} := \|u\|_{E_1} + \|v\|_{E_2}$$

является банаховым пространством и называется прямой суммой банаховых пространств E_1 и E_2 .

Определение 1. Линейный замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве H будем называть сильно позитивным, если область определения $D(A)$ плотна в H , при некотором $\varphi \in (0, \pi)$, для всех точек из угла $|\arg \lambda| \leq \varphi$ (включая $\mu = 0$) существуют операторы $(A + \mu I)^{-1}$ и для этих μ имеет место оценка

$$\|(A + \mu I)^{-1}\| \leq c(1 + |\mu|)^{-1},$$

где I -единичный оператор в H , $c = const > 0$.

Простейшим примером сильно позитивных операторов является самосопряженный, положительно-определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

Пусть A является сильно позитивным оператором в H . Так как обратный оператор A^{-1} ограничен в H , то

$$H(A^n) = \left\{ u : u \in D(A^n), \|u\|_{H(A^n)} = \|A^n u\|_H \right\}, \quad n \in N$$

-гильбертово пространство, норма которого эквивалентна норме графика оператора A^n .

Определение 2. Пусть A сильно позитивный оператор H . Тогда интерполяционные пространства $(H(A^n), H)_{\theta, p}$ гильбертовых пространств $H(A^n)$ и H определяется равенством

$$(H(A^n), H)_{\theta, p} := \left\{ u : u \in H, \|u\|_{(H(A^n), H)_{\theta, p}} = \int_0^{+\infty} t^{-1+\theta p n} \|A^n e^{-tA} u\|_H^p dt < \infty \right\},$$

$$\theta \in (0, 1), \quad p \geq 1, \quad n \in N.$$

Через $L_p(0, 1; H)$, $1 < p < \infty$, обозначим банахово пространство (при $p = 2$ гильбертово пространство) вектор функций $x \rightarrow u(x) : (0, 1) \rightarrow H$ сильно измеримых и суммируемых в p -й степени, с нормой

$$\|u\|_{L_p((0, 1); H)} := \left(\int_0^1 \|u(x)\|_H^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а через $W_p^n((0, 1); H(A^n), H) := \{u : A^n u, u^{(n)} \in L_p((0, 1); H)\}$ обозначим банахово пространство вектор функций с нормой

$$\|u\|_{W_p^n((0, 1); H(A^n), H)} := \|A^n u\|_{L_p((0, 1); H)} + \|u^{(n)}\|_{L_p((0, 1); H)}$$

Известно [5, Теорема 1.8.2], что если $u \in W_p^n((0, 1); H(A^n), H)$, то

$$u^{(j)}(\cdot) \in (H(A^n), H)_{\frac{j+1}{n}, p}, \quad j = \overline{0, (n-1)}$$

Пусть $s > 0$ и E, E_1 банаховы пространства. Обозначим для $0 < s \leq 1$, $p \in (1, \infty)$ банахово пространство.

$$B_p^s\left((0, 1); (E_1, E)_{1-\frac{s}{2}, 2}, E\right) := \left(W_p^2((0, 1); E_1, E), L_p((0, 1); E)\right)_{1-\frac{s}{2}, 2}$$

и для $1 < s < 2$ банахово пространство

$$B_p^s\left((0, 1); (E_1, E)_{1-\frac{s}{2}, 2}, E\right) := \left(W_p^2((0, 1); E_1, E), B_p^1\left((0, 1); (E_1, E)_{\frac{1}{2}, 2}, E\right)\right)_{2-s, 2}$$

3. Основные результаты. Рассмотрим сначала следующую краевую задачу в H .

$$L(\lambda)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_{10}(\lambda)u &:= \alpha u'(1) + \lambda u(1) + B_1 u(0) = f_1, \\ L_{20}(\lambda)u &:= \beta u'(0) - \lambda u(0) + B_2 u(1) = f_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ - комплексный параметр; A, B_1, B_2 линейные операторы в H ; α и β некоторые комплексные числа;

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) A является сильно позитивным оператором в H ;
- 2) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ некоторые комплексные числа, с $|\arg \alpha| \leq \frac{\pi - \varphi}{2}, |\arg \beta| \leq \frac{\pi - \varphi}{2}$ при некотором $\varphi \in (0, \pi)$;
- 3) Линейный неограниченный оператор B_1 ограничено действует из $H(A^{\frac{1}{2}})$ в H и из $H(A)$ в $H(A^{\frac{1}{2}})$;
- 4) Линейный ограниченный оператор B_2 действует из H в H и из $H(A)$ в $H(A)$.

Тогда, для $f_k \in (H(A), H)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}$ и для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg \lambda| \leq \varphi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, задача (1)-(2) имеет единственное решение $u \in W_p^2((0,1); H(A), H)$ и для таких λ , для решения задачи (1), (2) имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} &|\lambda| \|u\|_{L_p((0,1); H)} + \|u''\|_{L_p((0,1); H)} + \|Au\|_{L_p((0,1); H)} \leq \\ &\leq c(\varphi, \varepsilon) \sum_{k=1}^2 \left(\|f_k\|_{(H(A), H)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}} + |\lambda|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \|f_k\|_H \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь в H краевую задачу для неоднородного уравнения с параметром, т.е., задачу

$$L(\lambda)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} L_{10}(\lambda)u &:= \alpha u'(1) + \lambda u(1) + B_1 u(0) = f_1, \\ L_{20}(\lambda)u &:= \beta u'(0) - \lambda u(0) + B_2 u(1) = f_2, \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1.

Тогда, оператор $L_0(\lambda): u \rightarrow L_0(\lambda)u := (L(\lambda)u, L_{10}(\lambda)u, L_{20}(\lambda))$ для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg \lambda| \leq \varphi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, является изоморфизмом из $W_p^2((0,1); H(A), H)$ в $L_p((0,1); H) \dot{+}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \cdot p} (H(A), H) \dot{+}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \cdot p} (H(A), H)$ и для таких λ , для решения задачи (3), (4) справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} & |\lambda| \|u\|_{L_p((0,1); H)} + \|u''\|_{L_p((0,1); H)} + \|Au\|_{L_p((0,1); H)} \leq \\ & \leq c(\varphi, \varepsilon) \left[|\lambda| \cdot \|f\|_{L_p((0,1); H)} + \sum_{k=1}^2 \left(\|f_k\|_{(H(A), H)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \cdot p}} + |\lambda|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \|f_k\|_H \right) \right]. \end{aligned}$$

Изучим теперь краевую задачу с возмущенными частями в граничных условиях т.е., задачу

$$L(\lambda)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L_1(\lambda)u &:= \alpha u'(1) + \lambda u(1) + B_1 u(0) + T_1 u = f_1, \\ L_2(\lambda)u &:= \beta u'(0) - \lambda u(0) + B_2 u(1) + T_2 u = f_2. \end{aligned} \quad (6)$$

в H .

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) A является сильно позитивным оператором в H ;
- 2) Вложение $H(A) \subset H$ компактно;
- 3) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ некоторые комплексные числа, с $|\arg \alpha| \leq \frac{\pi - \varphi}{2}$, $|\arg \beta| \leq \frac{\pi - \varphi}{2}$ при некотором $\varphi \in (0, \pi)$;
- 4) Линейный неограниченный оператор B_1 ограничено действует из $H(A^{\frac{1}{2}})$ в H и из $H(A)$ в $H(A^{\frac{1}{2}})$;
- 5) Линейный ограниченный оператор B_2 действует из H в H и из $H(A)$ в $H(A)$;
- 6) Для любого $\delta > 0$ и $u \in W_p^2((0,1); H(A), H)$

$$\|T_k u\|_{(H(A), H)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \cdot p}} \leq \delta \|u\|_{W_p^2((0,1); H(A), H)} + c(\delta) \|u\|_{L_p((0,1); H)},$$

$$\|T_k u\|_H \leq \delta \|u\|_{B_p^{\frac{1}{2}}((0,1); (H(A), H)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \cdot 2}, H)} + c(\delta) \|u\|_{L_p((0,1); H)}.$$

Тогда, оператор $L(\lambda): u \rightarrow L(\lambda)u := (L(\lambda), L_1(\lambda)u, L_2(\lambda)u)$ для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg \lambda| \leq \varphi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, является изоморфизмом из $W_p^2((0,1); H(A), H)$ в $L_p((0,1); H) + (H(A), H)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}, p} + (H(A), H)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}, p}$ и для таких λ справедлива следующая оценка для решения задачи (5)-(6)

$$\begin{aligned} & |\lambda| \|u\|_{L_p((0,1); H)} + \|u''\|_{L_p((0,1); H)} + \|Au\|_{L_p((0,1); H)} \leq \\ & \leq c(\varphi, \varepsilon) \left[|\lambda| \cdot \|f\|_{L_p((0,1); H)} + \sum_{k=1}^2 \left(\|f_k\|_{(H(A), H)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}, p}} + |\lambda|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \|f_k\|_H \right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что в случае, когда в краевой задаче (5)-(6) B_1 и B_2 взяты нулевыми операторами, разрешимость полученных краевых задач изучена в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Aliev B.A., Yakubov Ya. Elliptic differential-operator problems with a spectral parameter in both the equation and boundary-operator conditions . Adv. Different.Equat. 11(10), 1081-1110 (2006), Erratum 12(9), 1079 (2007).
- [2]. Aliev B.A.: Solvability of boundary value problems for a second order elliptic differential –operator equation with a spectral parameter in both the equation and boundary conditions . Proceedings IMM of NAS of Azerbaijan, 2008. vol.29, p.3-20.
- [3]. Алиев Б.А. , Курбанова Н.К . : Разрешимость краевой задачи Редже для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Функциально- дифференциаль-ные уравнения и их приложения . Материалы VI Международной научной конференции , посвященной 80-летию профессоров Р.Г.Алиева и А.Р. Эфендиева . Махачкала 2013, с.23-27.
- [4]. Aliev B.A., Yakubov Ya.: Second order elliptic differential-operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach spaces. Integral Equations and operator theory, 2011, vol. 69, p. 269-300.
- [5]. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М., Мир, 1980.

[6]. [Yakubov](#) Ya.: Elliptic differential-operator problems with the spectral parameter in both the equation and boundary conditions [and the corresponding abstract parabolic initial boundary value problems. New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations, Springer INDAM . series, 10 \(2014\), p.437-471.](#)

УДК 517.9

Отсутствие глобальных решений задачи Коши для систем из трех нелинейных волновых уравнений с положительной начальной энергией

А. В. Алиев, Г.И. Юсифова

Азербайджанский Технический Университет

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Гянджинский Государственный Университет

Рассмотрим задачу Коши для систем из полулинейных гиперболических уравнений

$$u_{itt} - \Delta u_i + u_i + u_{it} = f_i(u_1, u_2, u_3), \quad x \in R^n, t > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \quad u_{it}(0, x) = u_{i1}(x), \quad x \in R^n, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где $f_i(u_1, u_2, u_3) = |u_1|^{p_{i1}} |u_2|^{p_{i2}} |u_3|^{p_{i3}} u_i$, $p_{ii} = p_i - 1$, $p_{ik} = p_k + 1$, $i, k = 1, 2, 3$.

Предположим, что

$$n \geq 2, \quad p_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

и дополнительно $p_1 + p_2 + p_3 \leq \frac{2}{n-2}$, $j = 1, \dots, m$ если $n \geq 3$.

(4)

Введем обозначения

$$E(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j + 1}{2} \left[|u'_{jt}|^2 + \|u_j\|^2 + \int_0^t |u'_{jt}(s, \cdot)|^2 ds \right] + \int_{R^n} |u_1(t, x)|^{p_1+1} \cdot |u_2(t, x)|^{p_2+1} |u_3(t, x)|^{p_3+1} dx, \quad ,$$

$$I(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j + 1}{p_1 + p_2 + p_3 + 3} \|u\|^2 - \int_{R^n} |\phi_1(x)|^{p_1+1} \cdot |\phi_2(x)|^{p_2+1} |\phi_3(x)|^{p_3+1} dx, \text{ где } |\cdot| \text{ -норма}$$

в $L_2(R^n)$, $\|\cdot\|^2 = |\nabla \cdot|^2 + |\cdot|^2$.

Теорема. Пусть выполнены условия (3)-(4). Предположим, что $u_{i0} \in H^1$ и $u_{i1} \in L_2(R^n)$, $i=1,2,3$ и дополнительно выполнены следующие условия:

$$E(0) > 0, \quad I(u_{10}, u_{20}, u_{30}) < 0, \quad \sum_{j=1}^3 \int_{R^n} u_{j0}(x) u_{j1}(x) dx \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{p_j + 1}{2} |u_{j0}|^2 > \frac{p_2 + p_2 + p_3 + 3}{p_2 + p_2 + p_3} E(0). \text{ Тогда решение задачи (1), (2)}$$

взрывается за конечное время, т.е. существует $T > 0$ такое, что $\lim_{t \rightarrow T-0} |u(t, \cdot)| = +\infty$.

Литература

1. Алиев А.Б., Казимов А.А. Дифференциальные уравнения, 2015, том 51, №12, 1563–1568 сс.

УДК 517.9

Отсутствие глобальных решений задачи Коши для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений со структурной диссипацией

А.Б. Алиев А.Б., А.Ф. Пашаев

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + (-\Delta)^\alpha u_t = f(t, x, u), \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad (2)$$

где $f(t, x, u) \geq c|u|^p$, $p > 1$ и $0 \leq \alpha < 1$.

Предполагается, что $1 < p \leq 1 + \frac{4}{n - 2\alpha}$ и начальные данные

удовлетворяет условию

$$\int_{R^n} [\psi(x) + \Delta \psi(x)] dx - \int_{R^n} (-\Delta)^\alpha \varphi(x) dx \geq 0.$$

Доказано, что тогда отсутствует глобальное решение.

References

1. A.B.Aliev, A.A.Kazymov. Global weak solutions of the Cauchy problem for semilinear pseudo-hyperbolic equations, differential Equations,45(2),(2009),1-11. Original. Russian published in Differential'nye Uravneniya, 2009, vol.45,No.2,pp.169-179.
2. A.B.Aliev, B.H.Lichaei. Existence and non- existence of global solutions of the Cauchy problem for higher semilinear pseudo-hyperbolic equations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications,72(2010), pp. 3275-3288.
3. A.B.Aliev, Pashayev A.F. Global existence and nonexistence of solution for Cauchy problem fora class of fourth order semi-linear pseudo-hyperbolic equations withstructural damping Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. 36 (4), 3-21 (2016).

Формулы для вычисления одного вида определителей

М.С. Алиев

Махачкала, Дагестанский государственный университет

В данной заметке приведены формулы по которым можно вычислить определители $D_{q-1,q}^n = |1, x_i, \dots, x_i^{q-2}, x_i^{q+1}, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n-1}$, при любых

$n, 1 \leq q \leq n$. Положим $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$,

$$\mu_{k-1}^k = \prod_{i=1}^{k-1} (x_k - x_i), \mu_k = \prod_{1 \leq j < i \leq k} (x_i - x_j).$$

Рассмотрим еще определители $D_{q-\alpha,q}^n$, где $1 \leq \alpha < q$.

Приведем легко вычисляемые случаи.

$$D_{0,1}^n = |x_i^2, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} x_1^2 x_2^2 \dots x_{n-1}^2,$$

$$(1) D_{0,n}^n = |x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-1}|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1},$$

$$D_{n-1,n}^n = |1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-2}|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} - \text{определитель Вандермонда},$$

При $q=n, 1 < \alpha < n - 2$ определитель вычислен в [1] стр.111

(2) $D_{\alpha,n}^n = |1, x_i, \dots, x_i^{\alpha-1}, x_i^{\alpha+1}, \dots, x_i^{n-1}|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} \sum_{n-1-\alpha} x_{i1} x_{i2} \dots x_{in-1-\alpha}$, где слагаемыми суммы являются $n-1-\alpha$ -симметричные функции $n-1$ чисел x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . При $\alpha=0$, $0 < q \leq n = 1$, [1],

(3) $D_{0q}^n = |x_i, \dots, x_i^{q-1}, x_i^{q+1}, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1} \sum_{n-q} x_{i1} x_{i2} \dots x_{in-q}$.

Далее рассмотрим случаи $1 \leq \alpha < q \leq n - 1$.

ЛЕММА 1.

(4) $D_{q-1,q}^n = \mu_{n-2}^{n-1} [x_{n-1}^2 D_{q-1,q}^{n-1} + x_{n-1} D_{q-2,q}^{n-1} + D_{q-2,q-1}^{n-1}]$ при $\alpha = 1$,

(5) $D_{q-\alpha,q}^n = \mu_{n-2}^{n-1} [x_{n-1}^2 D_{q-\alpha,q}^{n-1} + x_{n-1} (D_{q-\alpha-1,q}^{n-1} + D_{q-\alpha,q-1}^{n-1}) + D_{q-\alpha-1,q-1}^{n-1}]$ при $\alpha \geq 2$.

Для вычисления определителя $D_{q-1,q}^n$ $n-1$ строку умножим на -1 и прибавим к каждой предыдущей строке, вынесем знак минус из всех $n-2$ первых строк и разложим определитель по элементам первого столбца. После представления полученного определителя в виде суммы определителей и исключения слагаемых с противоположными знаками получим (4). Аналогично рассуждаем и при $\alpha \geq 2$.

ЛЕММА 2. $\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{12}^n = \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-2}}^2 + \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-3}}^2 x_{i_{n-2}} x_{i_{n-1}}$

Доказательство проведем методом математической индукции.

$D_{12}^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$,

$D_{12}^4 = \mu_3 [\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}]$.

Предположим, что лемма верна при $n=m-1$

$\frac{1}{\mu_{m-2}} D_{12}^{m-1} = \sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-3}}^2 + \sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-4}}^2 x_{i_{m-3}} x_{i_{m-2}}$

$D_{12}^m = \mu_{m-2}^{m-1} [x_{m-1}^2 D_{12}^{m-1} + x_{m-1} D_{02}^{m-1} + D_{01}^{m-1}]$

$D_{02}^{m-1}, D_{01}^{m-1}$ после вынесения общих множителей вычисляем по

формуле (3)

$\frac{1}{\mu_{m-1}} D_{12}^m = x_{m-1}^2 [\sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-3}}^2 + \sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-4}}^2 x_{i_{m-3}} x_{i_{m-2}}] +$

$+ x_{m-1} x_1 \dots x_{m-2} \sum_1^{m-2} x_{i_1} \dots x_{i_{m-3}} + x_1^2 x_2^2 \dots x_{m-2} =$

$\sum_1^{m-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{m-2}}^2 + \sum_1^{m-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{m-3}}^2 x_{i_{m-2}} x_{i_{m-1}}$.

Замечание. Для облегчения доказательств можно воспользоваться симметрией определителя $D_{q-1,q}^n$ относительно чисел x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и

проследить только за слагаемыми содержащими x_{n-1} в формулах (4), (5). Также в процессе выкладок не обращаем внимания на μ_x . Сумму первых двух слагаемых формул (4), (5) обозначим через $D_{q,q-1}^{0n}$ и при вычислениях вместо знака равенства вставим знак \rightarrow .

ЛЕММА3. При $\alpha = 1, 2 \leq q \leq n - 1$ определитель

$$\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{q-1,q}^n = \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-q}}^2 + \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-q-1}}^2 x_{i_{n-q}} x_{i_{n-q+1}} +$$

$$+ 2 \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-q-2}}^2 x_{i_{n-q-1}} x_{i_{n-q}} x_{i_{n-q+1}} x_{i_{n-q+2}} + \dots + (q-1) \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_k}^2 x_{i_{k+1}} \dots x_{i_{\gamma-2k}} \text{ при}$$

$$n \geq 2q - 1,$$

$\gamma = 2(n - q) - \text{суммарная степень переменных каждой суммы.}$

Слагаемыми первой суммы являются $n-q$ симметричные функции квадратов $n-1$ чисел x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Во второй сумме один из чисел x_i^2 заменяется произведением двух $x_{i_j} x_{i_k}$, в третьей сумме квадраты двух x_i^2 заменяются произведением четырех чисел x_i и так далее.

Теорема1. Число сумм в вырождении $D_{q-1,q}^n$ при $q+1 \leq n \leq 2q - 1$ растет от 2 до q . Числовой множитель при суммах растет от 1 при первых двух до $q-1$ при последней q -той сумме.

Доказательство. Процесс вычисления $D_{q-1,q}^n$ по формулам (4)(5) завершается по двум причинам индекс n уменьшается и достигает q и далее определитель вычисляется по формуле (2), или нижний индекс $q-1$ уменьшается и достигает нуля и применяем формулу (3). При $q+1 \leq n \leq 2q - 1$, индекс n уменьшается и достигает q быстрее чем $q-1$ до нуля. При $n=q+1$ число сумм равно двум, а числовые коэффициенты равны 1. Далее с увеличением n количество сумм и коэффициенты при них увеличиваются также на единицу. Максимальное число сумм достигается при $n=2q-1$ и равно q . Из леммы 2 следует при $q = 2, n=2q-1=3$ максимальное количество сумм равно двум и оба коэффициенты равны 1.

Пусть $q=3$. По формулам (1)(2)(3) и лемме 2 имеем

$$D_{2,3}^3 = \mu_2 \cdot 1, D_{1,3}^3 = \mu_2 \cdot \sum_1^2 x_i, D_{0,3}^3 = \mu_2 \cdot x_1 x_2, D_{1,2}^3 = \mu_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$$

$$D_{2,3}^{04} \rightarrow x_3^2 D_{2,3}^3 + x_3 D_{1,3}^3 \rightarrow x_3^2 + \sum_1^2 x_3 x_i. \text{ Из-за симметрии имеем}$$

$$\begin{aligned}
D_{2,3}^4 &= \mu_3(\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2}). \quad D_{1,3}^{04} \rightarrow x_3^2 D_{1,3}^3 + x_3(D_{0,3}^3 + D_{1,2}^3) \rightarrow x_3^2 \sum_1^2 x_i + \\
&x_3(x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) = \sum_1^2 x_i x_3^2 + \sum_1^2 x_i^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3. \\
D_{1,3}^4 &= \mu_3(\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3). \quad D_{2,3}^{05} \rightarrow x_4^2 D_{2,3}^4 + x_4 D_{1,3}^4 \rightarrow \\
&\rightarrow x_4^2 \left(\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2} \right) + x_4 \left(\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3 \right) = \\
&= \sum_1^3 x_4^2 x_i^2 + \sum_1^3 x_4^2 x_{i_1} x_{i_2} + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_4 + 2x_1 x_2 x_3 x_4. \\
D_{2,3}^5 &= \mu_4(\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 2x_1 x_2 x_3 x_4),
\end{aligned}$$

что требовалось доказать.

Теорема 2. При $n \geq 2q - 1$ количество сумм определителя $\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{q-1,q}^n$ и коэффициенты при них не меняются.

Докажем методом математической индукции. Только отправляясь от

$D_{2,3}^5$ мы подсчитаем и $D_{2,3}^6$, и $D_{2,3}^7$.

$$\begin{aligned}
D_{1,3}^{05} &\rightarrow x_4^2 D_{1,3}^4 + x_4(D_{0,3}^4 + D_{1,2}^4) \rightarrow x_4^2(\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3) + \\
&+ x_4(\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}) = \sum_1^3 x_4^2 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_4^2 x_1 x_2 x_3 + \\
&+ 2\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_4. \quad D_{1,3}^5 = \mu_4(\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}), \\
D_{2,3}^{06} &\rightarrow x_5^2 D_{2,3}^5 + x_5 D_{1,3}^5 \rightarrow x_5^2 \left(\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 2x_1 x_2 x_3 x_4 \right) + \\
&+ x_5(\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}). \text{Отсюда имеем} \\
D_{2,3}^6 &= \mu_5 \left(\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2 \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} \right) \\
D_{1,3}^{06} &\rightarrow x_5^2 D_{1,3}^5 + x_5(D_{0,3}^5 + D_{1,2}^5) \rightarrow x_5^2(\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) + \\
&+ x_5 \left((\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}^2) \right). \\
D_{1,3}^6 &= \mu_5 \left(\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} + 2 \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} \right) \\
D_{2,3}^{07} &\rightarrow x_6^2 D_{2,3}^6 + x_6 D_{1,3}^6 \rightarrow x_6^2 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}) + \\
&+ x_6 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}) = \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_6^2 + \\
&+ \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_6^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_6^2 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} + \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} x_6 + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_6.
\end{aligned}$$

В силу симметрии $D_{2,3}^7 =$

$$= \mu_6 [\sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4}^2 + \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} x_{i_5} + 2\sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}],$$

Что и требовалось доказать.

Литература

1. Г. Сеге, Г. Поля. Задачи и теоремы из анализа.- ч.2., И:Наука, 1978 г.- 111 с.

УДК 533.93, 519.6

Взаимодействие мощного лазерного излучения с веществом: эксперимент, обработка данных и моделирование

А.А. Аливердиев

Махачкала, ИПГ ДНЦ РАН

Махачкала, Дагестанский государственный университет

e-mail: aliverdi@mail.ru

Мы представляем краткий обзор наших работ в области исследования взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом, включающий обработку экспериментальных данных и компьютерное моделирование изучаемых явлений. Следует особо отметить, что во многих обсуждаемых экспериментах моделирование использовалось как для оптимизации эксперимента, так и для интерпретации экспериментальных результатов.

Рассматривается ряд задач, включая анализ гидродинамики короны лазерной плазмы по экспериментальным разрешенным по времени интерферометрическим снимкам [1,2], ударного сжатия структурированных мишеней [3,4 и др.], исследования экстремальных состояний углерода [5-8] и др. Некоторые вопросы применения интегрально-геометрических методов в обработке экспериментальных данных также обсуждаются [2,9].

Автор выражает глубокую признательность профессору Димитри Батани и коллегам из групп лазерной плазмы лаборатории CELIA (университет Бордо 1, Франции) и физического факультета им. Дж. Оккьялини университета Милана-Бикокка (Милан, Италия) за плодотворную совместную работу.

1 A. Aliverdiev, D. Batani, R. Dezulian, et al. // Phys. Rev. E **78** (2008) 046404

2. A. Aliverdiev // Monitoring Science & Technologies **2** (2012) 57-60

3. A. Aliverdiev, D. Batani, L. Antonelli, et al. // Phys. Rev. E **89** (2014) 053101

4. A. Aliverdiev, D. Batani, A. Amirova, et al. // Nukleonika, **60** (2) (2015) 213-216
5. A. Aliverdiev, D. Batani, R. Dezulian and T. Vinci // Radiation Effects and Defects in Solids, **165** (2010) 566-572
6. S. Paleari, D. Batani, ..., and A. Aliverdiev // Eur. Phys. J. D **67** (2013) 136
7. A. Aliverdiev, D. Batani, and R. Dezulian // High Power Laser Science and Engineering **1**(2) (2013) 102-104
8. S. Paleari, D. Batani, ..., and A. Aliverdiev // Phys. Scr. **T161** (2014) 014018
9. A. Aliverdiev // Optical Memory & Neural Networks (Information Optics) **15** (2006) 97

УДК 656.02: 338.242.2

Мультиагентные системы в логистике: информационно-аналитические аспекты

Б.И. Алибеков¹, Э. А. Мамаев²

**¹ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»,
Махачкала, Россия**

**²ФГБОУ ВО «Ростовский государственный университет путей
сообщения», Ростов-на-Дону, Россия**

Промежуточное положение логистических предприятий между производителями, поставщиками, транспортными и сбытовыми организациями, а также высокая зависимость результатов их работы от экономической активности отраслей формируют задачи, в числе которых вопросы стратегического планирования, взаимодействия предприятий с разнородными по своим целевым ориентирам предприятиями, полное и качественное транспортно-логистическое обеспечение предприятий и др.[1] При этом решение практически всех задач опираются на информационные технологии, независимое развитие которых в логистических, промышленных и транспортных предприятиях определяют и задачи обеспечения их совместимости и др. Мультиагентные технологии информационно-управляющих систем в управлении логистическими процессами предприятия, с одной стороны, является современным этапом развития технологий их

взаимодействия [2, 3]. Формализованное аналитическое представление интересов функционирования мультиагентной логистической системы представляется следующим образом.

Пусть логистическая цепь (условно представляющая логистическую систему) включает n предприятий – агентов. Известны следующие данные: T_i – максимальные трудовые ресурсы в i -ом элементе логистической цепи; M_i – максимальная мощность производственных ресурсов в i -ом элементе логистической цепи; S_i – максимальный объем ресурса, который может быть привлечен для функционирования i -го элемента логистической цепи; $ct_i (cm_i, cs_i)$ – стоимость единицы трудового ресурса (мощности, сырьевого ресурса) в обеспечении работы i -го элемента логистической цепи; Δtm_i – потребность единицы трудового ресурса в обслуживании единицы производственной мощности i -го элемента логистической цепи; Δsm_i – потребность в единице производственной мощности i -го элемента логистической цепи для переработки единицы сырьевого ресурса; Δxos_i – потребность в единице ресурса для производства единицы продукции на i -ом элементе логистической цепи; Δxis_{i-1} – потребность в единице ресурса на i -ом элементе логистической цепи для переработки продукции полученных от $i-1$ -го элемента логистической цепи; cp_i – стоимость единицы производства (услуги) i -го элемента логистической цепи.

Требуется определить объем производства каждого элемента цепи для оптимального функционирования логистической системы.

Обозначим x_i – объем производства i -го элемента логистической цепи.

Тогда оптимизационная задача для функционирования логистической системы (цепи) имеет вид:

$$x_n \rightarrow \max, \quad (1)$$

при ограничениях

$$x_n \leq P_n, \quad (2)$$

$$x_1 = \Delta xos_1 s_1, \quad (3)$$

$$x_i = \Delta x o s_i s_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad (4)$$

$$s_i = \Delta x i s_{i-1} x_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \quad (5)$$

$$m_i = \Delta s m_i s_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$t_i = \Delta t m_i m_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$m_i \leq M_i, s_i \leq S_i, t_i \leq T_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$c p_i x_i \geq c t_i t_i + c m_i m_i + c s_i s_i + c p_{i-1} x_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \quad (10)$$

$$c p_1 x_1 \geq c t_1 t_1 + c m_1 m_1 + c s_1 s_1, \quad (11)$$

где P_n – предельный спрос на продукцию, генерируемой логистической цепью (системой).

Дискретное изменение мощностей и их использования, поставок сырья и производства продукции переводит задачу в класс задач дискретной оптимизации, нелинейность зависимостей приводит к появлению многоэкстремальности, многопродуктовый характер функционирования элементов логистической цепи приводит как к увеличению размерности, так и вариативности в использовании сырья, загрузки мощностей для производства разных типов продукции, росту вариативности спроса и возможной взаимозаменяемости продукции и услуг.

1 Задача балансирования интересов агентов в логистической системе (цепи) заключающаяся в получении «равной» доли выгоды от реализации потока в логистической системе.

$$\left(\max_i \frac{c p_i x_i}{R_i} - \min_i \frac{c p_i x_i}{R_i} \right) \rightarrow \min, \quad (12)$$

где

$$R_i = \begin{cases} c t_i t_i + c m_i m_i + c s_i s_i, & \text{при } i = 1, \\ c t_i t_i + c m_i m_i + c s_i s_i + c p_{i-1} x_{i-1}, & \text{при } i \geq 2, \end{cases} \quad (13)$$

$$c p_i x_i \geq R_i. \quad (14)$$

Если обозначить, $\rho_{\text{мин}}^{\text{рын}}$ – минимальная норма рентабельности работы предприятия на рынке, то (12)-(14) можно заменить следующим ограничением

$$\min_i \frac{c p_i x_i - R_i}{R_i} \geq \rho_{\text{мин}}^{\text{рын}}. \quad (15)$$

2. Для многоагентной системы, функционирующей как «единое целое», представляет интерес совокупная прибыль (чистый доход) системы

$$D_{сист} = \sum_{i=1}^n (cp_i x_i - R_i), \quad (16)$$

совокупная рентабельность

$$\rho_{сист} = \frac{\sum_{i=1}^n (cp_i x_i - R_i)}{\sum_{i=1}^n R_i}. \quad (17)$$

Условием стабильности или эффективного функционирования многоагентной системы можно считать

$$\rho_{сист} \geq \rho_{мин}^{рын}. \quad (18)$$

Важным элементом эффективности логистического аутсорсинга является информационная интеграция логистических агентов, причем эффект от аутсорсинга не может обеспечиваться отдельными предприятиями в логистических цепях товаро-и материалопотоков. Эффект достигается за счет внедрения информационно-управляющих технологий. При этом проблема совместимости информационных систем достигается за счет реализации кроссплатформенных технологий, выведения достаточной для принятия решений в области управления потоковыми процессами на платформы, не зависящие от корпоративных информационных систем.

Основные коллизии в реализации мультиагентной информационной системы управления потоковыми процессами в узле следующие.

1. Каждый агент преследует цель сокращение собственных издержек и рисков реализации потоковых процессов, что делает их малоуправляемыми или неуправляемыми. Для получения агломерационного эффекта от аутсорсинга управляющая сторона, как минимум должна консолидировать процессы и получить «эффект от масштаба», а максимум – разработать систему эффективного управления этими процессами. Оба эти направления лежать в области развития мультиагентных информационных систем управления.

2. Внешняя среда предоставляет многообразие вариантов развития логистических и транспортно-технологических процессов, которые не в полной мере прописываются в технологических процессах взаимодействия агентов

логистической цепи. Элиминацию издержек в связи с указанным обстоятельством можно получить использованием интегрированных информационно-управляющих систем логистических цепей.

3. Предприятия передавая на аутсорсинг технологические процессы оставляет за собой право на контроль над собственными активами участвующими в этих процессах. Это приводит к ограниченности получения «эффекта от масштаба» от их использования в процессах, не относящихся к данному предприятию.

Литература

1. Алибеков, Б.И. Логистика грузовых перевозок региональных транспортных систем: моделирование и управление: монография / Б. И. Алибеков // Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д, 2010. – 180 с.
2. Гуда, А.Н. Методические подходы к созданию единого информационного пространства транспортно-логистического рынка / А.Н. Гуда, Э.А. Мамаев, Э.А. Порицкий, А.В. Чернов// Казанская наука. –№9. – 2013. – С. 90-95.
3. Мамаев, Э. А. Принципы и положения единого информационного пространства рынка транспортных услуг / Э.А. Мамаев, И.А. Порицкий // Инженерный вестник Дона Том: 24, -№ 1, 2013. – 7 с. Режим доступа: [url: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1497](http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1497)

УДК 537.9

Собственные функции и собственные значения слабо фрактального квантового осциллятора

З.З. Алисултанов^{1,2}

¹Институт физики им. А.М. Амирханова ДНЦ РАН, Махачкала

²Дагестанский государственный университет, Махачкала

zaur0102@gmail.com

Аннотация

В первом и втором порядках теории возмущений рассмотрена задача квантового слабо-фрактального осциллятора. В работе дается определение слабой фрактальности рассматриваемого объекта. Получены явные выражения

для энергетического спектра и волновых функций слабо-фрактального осциллятора. Приведены общие физические соображения по применимости развитой модели.

Ключевые слова: квантовый осциллятор, дробные производные, теория возмущений

1. Введение

В последнее время для описания различных физических явлений часто используют формализм дробных производных. Хотя основы аппарата дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка (см. например [1]) были разработаны достаточно давно, реальное применение этого формализма для физических явлений было начато относительно недавно [2-5]. Это обстоятельство связано с тем, что дробные операторы не имели ясной физической интерпретации. Строго говоря, такая интерпретация отсутствует до сих пор. Некоторые попытки интерпретировать операторы дробного интегрирования и дифференцирования предприняты в работах [6-10].

Несмотря на отсутствие ясной интерпретации, использование дробных операторов оказалось очень эффективным. Использование этого аппарата позволяет с большой точностью интерпретировать сложные экспериментальные данные для таких явлений, как аномальная диффузия, теплоперенос в средах со сложной структурой, дисперсионный перенос в полупроводниках, расчет термодинамических свойств поверхностей, квантово-статистические эффекты и т.д.

В настоящей работе в рамках теории возмущений мы исследуем волновую функцию и энергетический спектр квантового осциллятора, описываемого уравнением Шредингера дробного порядка – фрактального осциллятора. Задача осциллятора является одной из важнейших задач квантовой механики, лежащей в основе интерпретации многих фундаментальных явлений. Поэтому обобщение этой задачи на случай дробного волнового уравнения представляет большой интерес.

2. Энергетический спектр и волновая функция

Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора в безразмерных переменных имеет вид

$$-\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \xi^2\psi(\xi) = \varepsilon\psi(\xi), \quad (1)$$

где $\xi = (m\omega_0/\hbar)^{1/2} r$ – безразмерная координата, $\varepsilon = 2E/\hbar\omega_0$ – безразмерная энергия, m – масса частицы, ω_0 – частота колебаний, r , E – размерные координата и энергия, соответственно. В уравнении (1) можно формально перейти к дробным операторам без введения дополнительных констант. Дробное уравнение Шредингера для осциллятора имеет вид

$$[-\nabla_\xi^\alpha + \xi^2]\psi(\xi) = \varepsilon\psi(\xi), \quad (2)$$

где ∇_ξ^α - дробная производная Рисса, определенная как [1]

$$\nabla_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\alpha)\right)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{\alpha-1}}, \quad (3)$$

где $1 < \alpha \leq 2$. Представляет интерес рассмотреть случай, когда порядок дробной производной в этом выражении очень мало отличается от 2, т.е. $\alpha/2 \rightarrow 1$. Такой осциллятор назовем слабо фрактальным по аналогии со слабонеидеальными системами, когда в последней имеется слабое возмущение. Слабое возмущение, однако, вовсе не должно приводить к незначительным изменениям общей физической картины. Например, теория такого фундаментального явления, как сверхпроводимость строится исходя из гамильтониана слабонеидеальной ферми системы. В связи с этим рассмотрим слабо фрактальный осциллятор с целью получения новых особенностей явлений, в которых задача осциллятора играет ключевую роль.

Для слабо фрактального осциллятора гамильтониан можно разбить на две части: невозмущенную и слабое возмущение,

$$H = H_0 + \hat{V}, \quad (4)$$

где $H_0 = -\nabla_{\xi}^2 + \xi^2$, $\hat{V} = \nabla_{\xi}^2 - \nabla_{\xi}^{\alpha}$. Критерием малости возмущения является выполнение условия $\alpha/2 \rightarrow 1$. Тогда уравнение Шредингера переписывается следующим образом

$$\left[-\nabla_{\xi}^2 + \xi^2 + \hat{V} \right] \psi(\xi) = \varepsilon \psi(\xi). \quad (5)$$

Дальнейшие вычисления удобно проводить в импульсном представлении, в связи с чем перепишем уравнение (5) в импульсном представлении

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial p^2} + p^2 + \hat{V}(p) \right] \psi(p) = E \psi(p), \quad (6)$$

где потенциал возмущения в импульсном представлении имеет вид

$$\hat{V}(p) = |p|^{\alpha} - p^2, \quad (7)$$

где p безразмерный импульс, связанный с размерным соотношением $p = P/\sqrt{m\omega_0\hbar}$. Заметим, что мы пока не используем нигде условие $\alpha/2 \rightarrow 1$.

Прежде чем переходить к конкретным расчетам, сделаем несколько замечаний.

Во-первых, заметим, что при $P = \sqrt{m\omega_0\hbar}$ потенциал равен нулю при любом α . Этот импульс соответствует нулевому состоянию осциллятора. Действительно, из соотношения неопределенностей Гейзенберга для нулевого состояния имеем: $r = \hbar/P$. Тогда, из равенства кинетической и потенциальной энергий (закон сохранения энергии) получаем: $P^4 = m^2\omega_0^2\hbar^2$ или $P = \sqrt{m\omega_0\hbar}$. Таким образом, для импульсов, близких к $\sqrt{m\omega_0\hbar}$ теория возмущений может быть использована даже если условие $\alpha/2 \rightarrow 1$ не выполняется. Другой вывод, который мы можем сделать состоит в том, что импульсы $P < \sqrt{m\omega_0\hbar}$, т.к. $P = \sqrt{m\omega_0\hbar}$ соответствует минимально возможному состоянию осциллятора.

Во-вторых, мы должны заметить, что потенциал (7) при очень больших ($P \gg \sqrt{m\omega_0\hbar}$) импульсах может стать достаточно большим даже если $\alpha/2 \rightarrow 1$. Например, при $P = 100\sqrt{m\omega_0\hbar}$ и $\alpha = 1.99$ мы получим $|V(p)| \approx 450$. При $P = 10\sqrt{m\omega_0\hbar}$ и $\alpha = 1.99$ мы уже получаем $|V(p)| \approx 2$. Поэтому, использовать теорию

возмущений можно только для значений импульсов, не сильно отличающихся от $\sqrt{m\omega_0\hbar}$. Другими словами, наша система может быть слабо возмущенной в том смысле, что $\alpha/2 \rightarrow 1$, но в то же время последнее не будет справедливым для $P \gg \sqrt{m\omega_0\hbar}$. Т.е. при очень больших импульсах даже очень близкие к 2 значения α могут вносить существенный вклад в решение задачи.

И наконец, заметим, что потенциал всегда носит притягивающий характер (т.е. $\hat{V}(p) < 0$). Невозмущенная задача $V = 0$ (т.е. $\alpha = 2$) решается точно. Спектр и волновая функция такой системы имеют вид

$$\psi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(p) e^{-p^2/2}, \quad \varepsilon^{(0)} = n + \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Итак, оператор возмущения имеет вид

$$\hat{V}(p) = |p|^\alpha - p^2, \quad (9)$$

Воспользуемся теорией возмущений, принимая во внимание сделанные выше замечания. Определим первую поправку к энергии

$$E^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(0)*} V \psi^{(0)} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(0)*} (|p|^\alpha - p^2) \psi^{(0)} dp. \quad (10)$$

Итак, все сводится к вычислению интеграла: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(0)*} |p|^\alpha \psi^{(0)} dp$. Подставляя вместо волновых функций свои выражения и учитывая четность подынтегральной функции, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(0)*} |p|^\alpha \psi^{(0)} dp = \frac{1}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [H_n(p)]^2 p^\alpha e^{-p^2} dp. \quad (11)$$

Заменим один из полиномов Эрмита своим явным выражением. Тогда

$$\int_0^{\infty} [H_n(p)]^2 p^\alpha e^{-p^2} dp = (-1)^n \int_0^{\infty} H_n(p) p^\alpha \frac{d^n}{dp^n} (e^{-p^2}) dp. \quad (12)$$

После n -кратного интегрирования получим

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2} \frac{d^n}{dp^n} (p^\alpha H_n(p)) dp. \quad (13)$$

Итак

$$E^{(1)} = \frac{1}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-p^2} \frac{d^n}{dp^n} [(p^\alpha - p^2) H_n(p)] dp. \quad (14)$$

Многочлен дробной степени $n + \alpha$, который требуется продифференцировать n раз, начинается с членов

$$p^\alpha H_n(p) = 2^n \left[p^{n+\alpha} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} p^{n-2+\alpha} + \frac{3}{4} \binom{n}{4} p^{n-4+\alpha} + \dots \right]. \quad (15)$$

Поэтому

$$\frac{d^n}{dp^n} (p^\alpha H_n(p)) = 2^n \left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} p^\alpha - \frac{1}{2} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} p^{\alpha-2} + \dots \right]. \quad (16)$$

При $\alpha = 2$, как легко видеть, остается только два первых члена

$$\frac{d^n}{dp^n} (p^2 H_n(p)) = 2^n \left[\frac{(n+2)!}{2} p^2 - \frac{1}{2} \binom{n}{2} n! \right]. \quad (17)$$

Итак, поправка к энергии имеет вид

$$\begin{aligned} E^{(1)} = \frac{1}{2n! \sqrt{\pi}} & \left\{ \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-p^2} p^\alpha dp - \right. \\ & - \frac{1}{2} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^{\infty} e^{-p^2} p^{\alpha-2} dp + \dots - \\ & \left. - \frac{(n+2)!}{2} \int_0^{\infty} e^{-p^2} p^2 dp + \frac{1}{2} \binom{n}{2} n! \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

Интегралы, входящие в это выражение определяются легко

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2} p^\alpha dp = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{\alpha-1}{2}} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right), \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2} p^{\alpha-2} dp = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{\alpha-3}{2}} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right), \quad (20)$$

и т.д. Тогда

$$\begin{aligned} E^{(1)} = \frac{1}{2n! \sqrt{\pi}} & \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \right. \\ & - \frac{1}{4} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + \dots - \\ & \left. - \frac{(n+2)!}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \binom{n}{2} n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

В реальных наиболее интересных объектах (металлы, жидкий гелий и т.д.) особенно интересными являются так называемые слабовозбужденные уровни, т.е. низкие уровни, т.к. характер наименее возбужденных состояний следует выяснить, а сильно возбужденные состояния рассматривать как газ таких слабовозбужденных состояний. Мы будем также рассматривать слабовозбужденные уровни, и поэтому в последнем выражении можно оставить лишь первые два члена. Тогда

$$E^{(1)} = \frac{1}{2n!\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \frac{1}{4} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - \frac{(n+2)!}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \binom{n}{2} n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (22)$$

Определим поправку к энергии следующего порядка и поправку к волновой функции. Для этого надо найти матричный элемент оператора возмущения. Так как для соответствующего нашему оператору возмущения рекуррентного соотношения полиномов Эрмита не существует, то говорить о разрешенных или запрещенных переходах нельзя. Единственное, что можно сказать, это то, что матричный элемент V_{mn} отличен от нуля при условии, что $m+n=2i$, где $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Действительно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(0)}(|p|^\alpha - p^2) \psi^{(0)} dp = \frac{1}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(p) H_n(p) (|p|^\alpha - p^2) e^{-p^2} dp. \quad (23)$$

отличен от нуля только при $m+n=2i$, т.к. только при этом условии подынтегральная функция – четная. Т.к. мы рассматриваем слабовозбужденные уровни, то будем считать, что разрешен переход $m=n \pm 2$. Такой матричный элемент вычисляется тем же методом, что и поправка первого порядка. В этом случае

$$p^\alpha H_{n+2}(p) = 2^{n+2} \left[p^{n+2+\alpha} - p^{n+\alpha} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} p^{n-2+\alpha} + \frac{3}{4} \binom{n}{4} p^{n-4+\alpha} + \dots \right]. \quad (24)$$

В том же приближении оставляем только первые три члена. Тогда

$$\begin{aligned}
V_{n+2,n} = & \frac{1}{\Theta} \left\{ \frac{\Gamma(n+\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+3)} \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right) - \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - \frac{\Gamma(n+5)}{\Gamma(5)} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) + \\
& \left. + \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(3)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}
\end{aligned} \quad , \quad (25)$$

где $\Theta = 4n! \sqrt{\pi(n+1)(n+2)}$. Аналогично для $m = n-2$ получим

$$V_{n-2,n} = \frac{1}{\Theta_1} \left\{ \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (26)$$

где $\Theta_1 = 4n! \sqrt{\pi} / \sqrt{(n+1)(n+2)}$. Итак, поправка второго порядка к энергии имеет вид

$$E^{(2)} = \sum_m \frac{|V_{mn}|^2}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} = \frac{|V_{n+2,n}|^2}{E_{n+2}^{(0)} - E_n^{(0)}} + \frac{|V_{n-2,n}|^2}{E_{n-2}^{(0)} - E_n^{(0)}}, \quad (27)$$

Или

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \left(|V_{n+2,n}|^2 - |V_{n-2,n}|^2 \right). \quad (28)$$

Итак, спектр слабо фрактального осциллятора с точностью до второго порядка теории возмущений имеет вид

$$\begin{aligned}
E = & n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4n! \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \right. \\
& - \frac{1}{4} \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha-1)} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - \\
& - \frac{(n+2)!}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \binom{n}{2} n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left(|V_{n+2,n}|^2 - |V_{n-2,n}|^2 \right)
\end{aligned} \quad . \quad (29)$$

Поправка к волновой функции имеет вид

$$\psi_n^{(1)} = \frac{V_{n+2,n}}{2} \psi_{n+2}^{(0)} - \frac{V_{n-2,n}}{2} \psi_{n-2}^{(0)}. \quad (30)$$

Тогда

$$\psi = \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(p) e^{-p^2/2} + \frac{V_{n+2,n}}{2} \psi_{n+2}^{(0)} - \frac{V_{n-2,n}}{2} \psi_{n-2}^{(0)}. \quad (31)$$

Переход к координатному представлению представляет собой преобразование Фурье

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p) e^{-ipx} dp. \quad (32)$$

Т.е. в данном случае все сводится к нахождению интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(p) e^{-p^2/2} e^{-ipx} dp, \int_{-\infty}^{\infty} H_{n+2}(p) e^{-p^2/2} e^{-ipx} dp, \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-2}(p) e^{-p^2/2} e^{-ipx} dp. \quad (33)$$

Эти интегралы определены в справочнике [11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(p) e^{-p^2/2} e^{-ipx} dp = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} H_n\left(\frac{x}{2}\right) e^{-x^2/4}. \quad (34)$$

3. Заключение

Итак, мы рассмотрели задачу на собственные функции и собственные значения гамильтониана квантового осциллятора, содержащего дробную производную Рисса в случае, когда порядок дробной производной близок к двум. В этом специальном случае можно применить теорию возмущений. Следует отметить, что здесь мы применили эту теорию в несколько необычном виде. Именно, возмущение в нашем случае «сидит» в кинетической части гамильтониана, а не в потенциальной, как обычно это принято.

Полученные в настоящей работе результаты могут быть применены для анализа многих явлений и эффектов. Наиболее интересным, на наш взгляд, представляется применение дробно – дифференциального подхода к фононному газу. Как известно, неидеальность фононного газа, связанная, в частности, со сложностью структуры кристалла, приводит к ангармонизму, с которым связаны многие интересные эффекты. Теория ангармонизма дробно – степенного характера имеет свои особенности и может представлять большой интерес при описании реальных экспериментальных результатов. Так, элементарный расчет показывает, что дробно-дифференциальный подход дает широкий класс зависимостей теплоемкости от температуры. В то же время известно, что зависимость теплоемкости от температуры для сложных кристаллов не является однозначной функцией, а определяется типом

кристалла и структурой. Последнее обстоятельство практически не описывается существующей теорией.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас Ф.Ф., Маричев О.И., Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск. 1987 г. Изд-во: Наука и техника. 688 с.
2. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. – World Scientific, 2000. – 463 p.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во „Артишок“, 2008. 512 с.
4. Нахушев А.М., Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Бейбалаев В.Д., Давудова Ф.Ф., Ламетов А.Г., Численное решение краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка, Вестник ДГУ, № 6, С. 86-92, 2013.
6. Нигматуллин Р.Р., Дробный интеграл и его физическая интерпретация, ТМФ, 90:3 (1992), 354–368
7. Rutman R.S., On the paper by R. R. Nigmatullin “Fractional integral and its physical interpretation”, ТМФ, 100:3 (1994), 476–478
8. Станиславский А.А., Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка, ТМФ 138, №3, С. 491-507 (2004)
9. Алисултанов З. З., Мейланов Р.П., Некоторые вопросы теории квантово-статистических систем, обладающих энергетическим спектром дробно-степенного типа, ТМФ, 173:1 (2012), 135–148
10. Алисултанов З.З., Мейланов Р.П., Некоторые особенности квантово-статистических систем с энергетическим спектром дробно-степенного типа, ТМФ 171, С. 404-416 (2012)
11. Бейтмен Г., Эрдейи А., Таблицы интегральных преобразований, Москва 1969, Изд-во: Наука, Т.1, 344 с.

Об одном классе квазилинейных эллиптических систем первого порядка

Амучиева Т.С.

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Пусть Q - ограниченная односвязная область с гладкой (класса C^2) границей и

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} D_2,$$

где постоянная $\alpha > 0$, D_i - оператор дифференцирования по x_i . Рассмотрим класс $\mathfrak{S}_0(\nu_0, \nu_1, Q)$ (образующий подкласс $\mathfrak{S}(\nu_0, \nu_1, Q)$, см.[1]) систем первого порядка вида

$$\begin{cases} D_2 u_1 + c_{11} D_1 u_2 + c_{12} D_2 u_2 = f_1, \\ -D_1 u_1 + c_{21} D_1 u_2 + c_{22} D_2 u_2 = f_2 \end{cases} \quad (1)$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq c_{ij} \xi_i \xi_j \leq \lambda_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R, \text{ н.в. } x \in Q, \quad \lambda_0, \lambda_1 > 0. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что этот класс (как и $\mathfrak{S}(\nu_0, \nu_1, Q)$) замкнут относительно G-сходимости.

Пусть $\nu_0, \nu_1 > 0$ - константы и $\nu_0 \nu_1^2 > 1$, $\gamma = \gamma(t)$, $t \in R_+$ - монотонно возрастающая неотрицательная непрерывная ограниченная функция, такая что $\gamma(t) \leq c_0 t$, $t \in R_+$, $c_0 > 0$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_0(\nu_0, \nu_1, \gamma, Q)$ класс квазилинейных эллиптических систем вида

$$\begin{cases} D_2 u_1 + a_{11}(x, u) D_1 u_2 + a_{12}(x, u) D_2 u_2 = f_1(x), \\ -D_1 u_1 + a_{21}(x, u) D_1 u_2 + a_{22}(x, u) D_2 u_2 = f_2(x), \end{cases} \quad (3)$$

для любого $y \in R^2$ принадлежащих классу $\mathfrak{S}_0(\nu_0, \nu_1, Q)$, где $u = (u_1, u_2)$, коэффициенты $a_{ij}(x, y)$, $x \in Q$, $y \in R^2$ - функции Каратеодори, удовлетворяющие при $i, j = 1, 2$ условию

$$|a_{ij}(x, y') - a_{ij}(x, y'')| \leq \gamma |y' - y''|, \quad y', y'' \in R^2, \text{ н.в. } x \in Q. \quad (4)$$

Пусть $r \geq p$ при $p > 0$ и $r > 2$ при $p = 2$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} D_2 u_1 + a_{11}(x, u + g_0)(D_1 u_2 + g_1) + a_{12}(x, u + g_0)(D_2 u_2 + g_2) = f_1(x), \\ -D_1 u_1 + a_{21}(x, u + g_0)(D_1 u_2 + g_1) + a_{22}(x, u + g_0)(D_2 u_2 + g_2) = f_2(x), \\ u = (u_1, u_2) \in W_{0p}(Q) \end{cases} \quad (5)$$

где $g_0 \in (L_r(Q))^2$, $g_1, g_2, f_1, f_2 \in L_p(Q)$, $W_{0p}(Q)$ - подпространство

$W_p^1(Q) \times W_p^1(Q)$, состоящее из элементов $u = (u_1, u_2)$ таких, что $u_2|_{\partial Q} = 0$,

$$\int_{\partial Q} u_1 ds = 0.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА. Существует такое $p_0 = p_0(\nu_0, \nu_1) > 2$, что при $2 < p \leq p_0$ задача (5)

однозначно разрешима, причем имеет место оценка

$$\|u\|_{W_p^1(Q)} \leq c_0 (\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{L_p(Q)}), \quad (6)$$

где $c_0 = c_0(\nu_0, \nu_1) > 0$ - константа, $f = (f_1, f_2) \in (L_p(Q))^2$, $g = (g_1, g_2) \in (L_p(Q))^2$.

Определение. Скажем, что последовательность $\{A_k\} \subset \mathfrak{F}_0(\nu_0, \nu_1, \gamma, Q)$ **G**-

сходится к $A \in \mathfrak{F}_0(\nu_0, \nu_1, \gamma, Q)$, если для любых $g_0 \in (L_r(Q))^2$, g_1, g_2 ,

$f_1, f_2 \in L_p(Q)$ последовательность $\{u^k\}$ решений задачи (5) для $\{A_k\}$ слабо в

$W_{0p}(Q)$ сходится при $k \rightarrow \infty$ к решению задачи (5) для A .

В смысле этого определения класс $\mathfrak{F}_0(\nu_0, \nu_1, \gamma, Q)$ **G**-компактен.

Литература

1. Амучиева Т.С. О **G**-компактности одного класса линейных эллиптических систем// Матер. Межд. конф. «ФДУ и их приложения», 2013. Махачкала, ИПЦ ДГУ. С.47-50
2. Райтум У.Е. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига, «Зинатне». 1989.

УДК 517.9

О спектре и следе дифференциального оператора с операторным коэффициентом

Н. М. Асланова, Байрамоглы М., Х.М. Асланов

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, e-mail:
nigar.aslanova@yahoo.com),

Азербайджанский Государственный Университет Экономики

Рассматривается краевая задача для дифференциально-операторного уравнения с неограниченным операторным коэффициентом и с краевыми условиями зависящими от спектрального параметра.

Найдена асимптотическая формула для собственных значений оператора и вычислен регуляризованный след. Отметим, что регуляризованный след для скалярного уравнения Штурма Лиувилля был впервые изучен Гельфандом и Б.М.Левитаном [1]. Для дифференциального оператора с неограниченным операторным коэффициентом он был определен в [2], а для абстрактных дискретных операторов более полный список литературы приведен в [3].

В пространстве $L_2((0, 1), H)$ рассматривается задача

$$ly(t) := yIV(t) + Ay(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t) \quad (1)$$

$$y(0) = y''(0) = y'''(1) = 0 \quad (2)$$

$$y''(1) - \lambda y'(1) = 0, \quad (3)$$

где $A = A > I$ (I – единичный оператор действующий в H) удовлетворяет условию $A^{-1} \in \sigma_\infty$ в H . При этих условиях спектр A дискретен. Обозначим его собственные значения и функции через $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ соответственно.

$q(t)$ операторно-значная функция в H удовлетворяющая условию $\|q(t)\| \leq const$ при каждом $t \in [0, 1]$. Помимо этого, предполагается выполнение следующих условий:

1) $\int_0^1 (q(t)\varphi_j, \varphi_j) dt = 0, j = 1, 2, \dots;$

2) $q^{(l)}(t) \in \sigma_1, [q^{(l)}(t)]^* = q^{(l)}(t), \forall t \in [0, 1],$ и $\|q^{(l)}\|_{\sigma_1} < const$ при $l = 0, 1, 2.$

Вводим пространство $H_1 = L_2((0, 1), H) \oplus H$ со скалярным произведением элементов $Y = (y(t), y_1), Z = (z(t), z_1)$ где $y(t), z(t) \in L_2((0, 1), H), y_1, z_1 \in H$, определенным как

$(Y,Z)H1 = \int_0^1 (y(t), z(t)) dt + (y1, z1)$. Через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в H .

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Кратность собственных значений оператора L равен двум и справедлива следующая асимптотическая формула для них

$$\lambda_{k,m} = \gamma_k + \left(\frac{\pi}{2} + \pi m + O\left(\frac{1}{m}\right) \right)^4 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

$$\lambda_k = \alpha(y) \sqrt{\gamma_k} \text{ где } \alpha(y) < 1 \text{ и достаточно близко к } 1.$$

Теорема 2. При условиях 1)-3) справедлива следующая формула следа оператора L

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k - \mu_k) = \frac{\text{tr}q(\pi) - \text{tr}q(0)}{4},$$

где λ_k собственные значения оператора L , а μ_k - собственные значения полученные из L при $q(t) \equiv 0$.

Литература

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Докл. АН СССР, 1953, т.88(4), с.593-596.
2. Максудов Ф.Г., Байрамоглы М., Адыгезалов А.А. О регуляризованном следе оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом. ДАН СССР, 1984, т.277, N4, с.795-799.
3. Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением. Матем. сб., 2002, т.193, N2, с.129-152.

УДК 517.983.24

Нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки с ядрами специального вида

С.Н. Асхабов^{1,2}, М.А. Бетилгириев³

¹*Чеченский государственный университет*

²*Чеченский государственный педагогический университет*

3 Грозненский государственный нефтяной технический университет

Пусть X есть вещественное банахово пространство, а X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Оператор A , действующий из X в X^* , называется монотонным, если $\forall u, v \in X$ выполняется неравенство $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$. Если A линейный оператор, то определение монотонного оператора совпадает с определением положительного оператора.

Рассмотрим в пространстве 2π -периодических функций $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|u\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$ оператор свертки $(Hu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u(t) dt$, где ядро $h(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ есть функция 2π -периодически продолженная на отрезок $[-2\pi, 2\pi]$. Положим $q = p/(p-1)$.

Лемма 1. Пусть $1 < p \leq 2$ и ядро $h(x)$ представимо в виде:

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) \cdot g(t) dt, \text{ где } g(x) \in L_{q/2}(-\pi, \pi). \quad (1)$$

Тогда оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(-\pi, \pi)$ в $L_q(-\pi, \pi)$ и

положителен, причем $\|Hu\|_q \leq \|g\|_1 \|g\|_{q/2} \|u\|_p$ и $\langle Hu, u \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) \cdot u(t) dt \right]^2 dx$ для любого $u(x) \in L_p(-\pi, \pi)$.

Всюду далее предполагается, что вещественнозначная функция $F(x, u)$ определена при $x \in [-\pi, \pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори. Обозначим через $L_p^+(-\pi, \pi)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi, \pi)$.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq 2$, $f(x) \in L_q(-\pi, \pi)$ и ядро $h(x)$ представимо в виде (1). Если для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

1) $|F(x, u)| \leq a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, где $a(x) \in L_q^+(-\pi, \pi)$, $d_1 > 0$;

2) $F(x, u)$ не убывает по u ;

3) $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^{p-1} - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(-\pi, \pi)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ интегральное уравнение

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u(t) dt = f(x)$$

имеет решение $u(x) \in L_p(-\pi, \pi)$. Это решение единственно, если в условии 2) функция $F(x, u)$ строго возрастает по u .

Рассмотрим в классе $M_p(-\pi, \pi) = \{u(x) : u(x) \in L_p(-\pi, \pi), u'(x) \in L_q(-\pi, \pi)\}$,

$1 < p < \infty$, интегро-дифференциальный оператор свертки $(Ku)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) \cdot u'(t) dt$ с

ядром

$$k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) \cdot g'(t) dt, \quad \text{где } g(x) \in M_p(-\pi, \pi). \quad (2)$$

Используя равенство

$$\langle Ku, u \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} g'(x+t) u(t) dt \right]^2 dx$$

методом максимальных монотонных операторов [1] доказывается следующая

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_q(-\pi, \pi)$ и ядро $k(x)$ представимо в виде (2). Если для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия 1)–3) теоремы 1, то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) \cdot u'(t) dt = f(x)$$

имеет решение $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Это решение единственно, если в условии 2) функция $F(x, u)$ строго возрастает по u .

В заключение отметим, что используя методы работы [2] можно доказать теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений и для других классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свертки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

2. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.

УДК 517.956

Краевые задачи для нагруженного вдоль своих характеристик гиперболического уравнения

А.Х. Агтаев

Нальчик, НИИ ПМА КБНЦ РАН

В докладе объектом исследования является нагруженное уравнение вида

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = \lambda u\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right) + \mu u\left(\frac{x+y}{2}, -\frac{x+y}{2}\right), \quad (1)$$

$\lambda, \mu = const$, которое рассматривается в области $\Omega = \{(x, y): 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}$.

Для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

В области Ω найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющие условиям:

I. $u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \varphi(x), \quad u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \psi(x), \quad 0 < x < 1;$

II. $u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) = \varphi(x), \quad u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \psi(x), \quad 0 < x < 1;$

III. $u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \varphi(x), \quad u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \psi(x), \quad 0 < x < 1.$

При определенных условиях гладкости на коэффициенты уравнения (1), а также при выполнении некоторых точечных условий согласования начальных данных доказаны теоремы существования и единственности задач I - III. Для доказательства теорем используется метод характеристик и метод функции Римана.

Также для уравнения (1) исследована задача Коши

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ заданные функции.

УДК:518.43:532.546

**Математическое моделирование процесса истощения залежей
легких нефтей**

Ахмедов С.А., Ахмедова З.Х. Мамаева Ж.А.

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Реферат. Пластовые системы НГКМ состоят из большого числа углеводородных и неуглеводородных компонентов, многопараметрические зависимости составов и физических свойств фаз этих смесей от давления, температуры и параметров состава, как правило, неизвестны. Сложность расчетов обусловлена не только многообразием состава углеводородных смесей, встречающихся в естественных залежах, высокими давлениями и температурами в них, но и возможным широким диапазоном изменения этих переменных в различных процессах разработки НГКМ месторождений.

Процессы истощения нефтяных оторочек НГКМ и залежей легких нефтей характеризуется возникновением двухфазных газожидкостных течений многокомпонентных смесей. Эти многокомпонентные смеси наряду с различными углеводородами в отдельных случаях могут включать в себя примеси таких неуглеводородных компонентов как азот, сероводород, углекислый газ. Погребенная же вода, насыщающая продуктивные пласты в процессах истощения считается неподвижной. Растворимостью воды в углеводородных газовой и жидкой фазах, и, наоборот, всех составляющих их компонентов в воде, а также ее влиянием на фазовые проницаемости подвижных фаз пренебрегаются. При таких ограничениях погребенная вода не участвует как в термодинамических, так и в фильтрационных процессах, протекающих при разработке залежей нефти на режимах истощения. Она лишь на соответствующую величину снижает поровый объем продуктивных пластов. В отмеченных выше ограничениях, система дифференциальных уравнений плоскорадиальной фильтрации многокомпонентных смесей [1] записывается в виде:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\alpha_i \bar{r} z_i \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{\partial (\delta z_i)}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha \bar{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial \delta}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где r, τ и P – безразмерные радиус, время и давление.

Система уравнения (1-2) для рассматриваемой задачи замыкается зависимостями относительных фазовых проницаемостей от насыщенности

$$\begin{aligned} f_{ж} &= f_{ж}(s) \\ f_{г} &= f_{г}(s_{г}) \end{aligned} \quad (3)$$

соответствующими граничными условиями

$$\text{а) } \begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i z_i \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = \text{const} \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=1} &= 0 \end{aligned}, \quad (4)$$

$$\text{б) } \begin{aligned} P_c \Big|_{r=r_c} &= \text{const} \\ \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=1} &= 0 \end{aligned}, \quad (5)$$

и общими для обоих случаев начальными условиями.

$$\begin{aligned} z_i(r, 0) &= z_i(r) \\ P(r, 0) &= P(r), \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (1-2) вместе с граничными условиями и начальными условиями (4-5) написана в безразмерном виде. В качестве характерных значений, к которым отнесены размерные величины, выбраны:

K_0 – абсолютная проницаемость пористой среды;

P_0 – начальное пластовое давление;

$\rho_{ж0}$ – плотность жидкости при P_0 ;

$\mu_{г0}$ – вязкость газа при P_0 ;

R_k – радиус контура питания;

$t^* = \frac{m \mu_{г0} R_k^2}{k_0 P_0}$ – характерное время;

$q_x = 2\pi k_0 h \rho_{ж0} P_0 / \mu_{г0}$ – характерный дебит.

Для решения задачи воспользуемся четырехточечной неявной разностной схемой. Предварительно введя новую переменную $x = \ln(r/r_c)$ интервал $(0, x_n)$ разобьем на N равных частей. Коэффициенты при неизвестных будем брать с предыдущего временного слоя с последующим уточнением (итерационный процесс).

В последующем систему уравнений (1) будем использовать для расчета n независимых составов z_i , уравнение (2) – для расчета давления. Для решения задачи в принципе достаточно было бы решения $(n-1)$ уравнений типа (1) для вычисления любых $(n-1)$ независимых составов z_i . Вычисление же n -ого состава производится с целью контроля условия $\sum_{i=1}^n z_i = 1$.

Из условий на границе имеем $P_{N-1} = P_N$, а начальные условия примут вид: $z_i(x_k, t) = z_i^0(x_k)$, $P(x_k, t) = P^0(x_k)$.

Данная схема всегда устойчива, погрешность аппроксимации $e = O(\Delta t) + O(\Delta x)$.

Для решения системы с указанными начальными и граничными условиями, используем метод простых итераций по z_i . При этом уравнение (2) решается методом прогонки, с учетом условия на границе ($P_N = P_{n-1}$) и определяются все P_r^j .

Так для определения компонентоотдачи, а также суммарного извлечения углеводородов из пласта в долях от их первоначального содержания могут быть использованы

$$\Gamma = \frac{Q_{го}}{Q_{жо}} = \frac{\beta \rho_{жо} M_{го}}{(1 - \beta_0) \rho_{го} M_{жо}}, \quad (7)$$

где $Q_{го}$, $Q_{жо}$ – объемные расходы газовой и жидкой фаз при нормальных условиях.

По изложенной выше методике было проведено исследование характеристик фильтрации многокомпонентной смеси в процессе истощения кругового элемента пласта радиусом $R_k = 250$ м, мощностью $h = 10$ м, проницаемостью $k = 0,2$ дарси, пористостью $m = 0,2$. Исследование

проводилось для условий близких к условиям разработки на режиме истощения нефтяной оторочки УШ₁₋₂ пластов НГКМ Русский Хутор Ставропольского края и Южно- Сухокумск Дагестана.

По изложенной выше методике рассчитывались такие характеристики процессов как распределения вдоль пласта давления, насыщенностей, составов потока и смеси, изменения в процессе истощения газового фактора, компонентоотдачи, массовых расходов газовой и жидкой фазы, забойного и контурного давлений

Результаты расчетов показывают, что содержанием промежуточных и тяжелых компонентов ($C_3 H_8 - C_{7+}$) в смеси при ее движения от контура к скважине увеличивается, а легких ($N_2, CO_2, C_1 H_4, C_2 H_6$) – уменьшается. Такая же картина наблюдалась и в случае установившегося движения[2]. Эти изменения состава пластовой смеси особенно резко проявляются со временем, т.е. со снижения пластового давления. Характер изменения составов потока вдоль радиуса резко отличается от характера распределения составов смеси. В начальный момент времени содержание промежуточных и тяжелых компонентов в потоке (компонентный фактор Γ_i) от контура к скважине убывает, а легких – увеличивается. В процессе истощения наблюдается увеличение доли легких и уменьшение доли промежуточных и тяжелых компонентов в потоке, что хорошо согласуется с поведением газового фактора (Γ) и мольной доли газа в потоке (β) во времени. Коэффициент нефтеотдачи при разработке на истощение не превышает 30. Следовательно, такие месторождения желательно разрабатывать современными методами с поддержкой пластового давления.

Литература

1. Ахмедов С.А., Розенберг М.Д., Шовкринский Г.Ю. Исследование характеристик разработки нефтяных оторочек нефтегазоконденсатных месторождений на режимах истощения. НТС, ВНИИ, 1979, М., вып. 68, с. 47-68.

2.Ахмедов С.А.Исследование особенностей фильтрации многокомпонентных смесей при стационарных режимах. Материалы 37Международной конференции IT+SE2010,г.Ялта,2010,с301-304.

Об эконометрической и p -адической аппроксимации динамики

индекса РТС: сравнение двух моделей

С.А. Ахуньянова, П.М. Симонов

Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет, E-mail: simpn@mail.ru

Главной предпосылкой изучения ценовых колебаний, происходящих на финансовых рынках, с помощью методов эконофизики является схожесть физических и экономических процессов. В качестве метода моделирования финансовых процессов выбирается один из методов эконофизики – p -адический анализ, который наиболее детально разработан и изучен В.М. Жарковым [1-3, 5, 10], В.М. Жарковым и Н.Н. Павловой [10]. Целью исследования является применение методики p -адического моделирования и прогнозирования для колебаний цен на финансовых рынках, предметом – динамика индекса РТС. Все необходимые понятия по p -адическому анализу содержатся в статьях [6-9].

Приведено математическое описание p -адического анализа – определение p -адических чисел и их представление в поле чисел \mathbb{Q}_p . Оно является полным метрическим (порожденным p -адической неархимедовой нормой) полем чисел, что позволяет применять p -адические числа для моделирования стохастических явлений. Элементами поля \mathbb{Q}_p являются классы эквивалентных последовательностей Коши рациональных чисел относительно p -адической нормы.

Найдены преимущества и недостатки p -адического анализа по сравнению с эконометрикой. Результаты исследований могут быть использованы для дальнейшего изучения волновых паттернов p -адическим отображением,

применяемых не только к ценовым колебаниям, но и к другим экономическим процессам. Кроме того, p -адические модели могут выступать в качестве инструмента технического анализа.

Литература

1. Жарков В.М. Моделирование сложных систем с обменом информации физическими методами // Вестник Пермского университета. Сер. «Информационные системы и технологии». – 2001. – Вып. 5. – С. 126–130.
2. Жарков В.М. Численное моделирование магнетиков в адельном представлении // Вестник Пермского университета. Сер. «Информационные системы и технологии». – 2001. – Вып. 5. – С. 131–136.
3. Жарков В.М. Адельная теория фондового рынка // Вестник Пермского университета. Сер. «Информационные системы и технологии». – 2003. – Выпуск 6. – С. 75–81.
4. Жарков В.М., Павлова Н.Н. P -адическая аппроксимация ценовых рядов // Вестник Пермского университета. Сер. «Информационные системы и технологии». – 2009. – Вып. 9 (35). – С. 25–29.
5. Жарков В.М. P -адическая теория фондового рынка // VI Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологий", ЭКОМОД-2010, посвященная памяти академика РАН А.А. Петрова. г. Киров, 27 июня – 3 июля 2011 / Сборник трудов. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2011. – С. 165–172.
6. Симонов П.М., Филимонова С.А. P -адическая аппроксимация изменения цен // Экономика и управление: актуальные проблемы и поиск путей решения: материалы регион. молодых ученых и студентов (Пермь, Перм. гос. ун-т, 22 апр. 2015 г.) / отв. ред. А.М. Ощепков; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2015. – С. 82–87.
7. Симонов П.М., Филимонова С.А. Моделирование динамики индекса РТС на основе p -адической аппроксимации // IX Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий», ЭКОМОД-2016 [Электронный ресурс]: г. Киров,

- 4–9 июля 2016 / Сборник материалов конференции // Под ред. И.Г. Поспелова и А.В. Шатрова. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2016. – С. 122–132.
8. Симонов П.М., Филимонова С.А. К вопросу о моделировании динамики индекса РТС на основе p -адической аппроксимации // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016» / под ред. И.Л. Батаронова, А.П. Жабко, В.В. Провоторова; Воронеж. гос. техн. ун-т., Моск. гос. ун-т., С.-Петербург. гос. ун-т., Воронеж. гос. ун-т., Пермск. гос. нац. исслед. ун-т, Пермск. нац. исслед. политех. ун-т. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. – С. 315–319.
9. Симонов П.М., Филимонова С.А. P -адическое моделирование динамики индекса РТС в зависимости от таймфреймов // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. – 2016. – № 4(31). – С. 74–85.
10. Zarkov V. Adelic theory of stock market. Market Risk and Financial Markets Modeling. Berlin, Heidelberg e.a.: Springer-Verlag, 2012, chapter 23. P. 255–267.

УДК 004.4

Использование математического пакета MAPLE в курсе высшей математики

С.Г. Байрамова

Сумгаит, Сумгаитский Государственный Технический Колледж

e-mail: b.sevinc@mail.ru

В настоящее время информационные технологии находят все большее применение в учебном процессе ВУЗов при изучении общеобразовательных дисциплин. Большую роль играют математические пакеты (MathCAD, MAPLE, Math LAB и др.) при изучении высшей математики. Пакеты дают возможность быстро провести необходимый численный эксперимент, проверить ту или иную гипотезу, быстро испытать различные методы и подходы к решению задачи,

выяснить границы использования метода. Анализ публикаций показывает, что чаще всего в учебном процессе используется пакет MathCAD. Не отрицая преимуществ MathCAD, следует все же подчеркнуть, что он прежде всего ориентирован на решение задач с помощью численных (приближенных) методов. Правда, в сильно упрощенном варианте он допускает решение некоторых задач в аналитическом (в общем) виде, используя при этом ядро пакета MAPLE. Учитывая, что в курсе высшей математики делается упор прежде всего на решение задач в общем виде, представляет интерес использовать при ее изучении именно пакет MAPLE. Прежде всего, он ориентирован именно на математические задачи, по этой причине он с большим успехом используется в более чем 400 ведущих университетах мира [1]. MAPLE позволяет успешно решать задачи практически во всех существующих разделах математики. При необходимости можно существенно усилить мощь MAPLE в определенной области подключив к пакету специализированную библиотеку. Из нескольких десятков существующих библиотек назовем только некоторые, представляющие интерес при изучении высшей математики: `combinat`- комбинаторика, `linalg` – линейная алгебра, `tensor`- работа с тензорами, `simplex`- решение задач линейной оптимизации, `DEtools`- решение дифференциальных уравнений, `rowseries`- степенные разложения, `intrans`- интегральные преобразования (Лапласа, Фурье, Гильберта, Меллина и др.), `numapprox`- числовая аппроксимация, `orthopoly`- ортогональные полиномы (Эрмита, Лежандра, Якоби и др.), `logic`- математическая логика, `stats`- статистические расчеты. В пакете MAPLE возможно работать без знаний программирования, сосредоточив все внимание на математической сущности задачи. Пакет обладает мощными возможностями графической двух и трехмерной визуализации вычислений, осуществлять анимацию полученных результатов решения. Возможно, получать стереоскопические (объемные) изображения объектов [2].

Для иллюстрации возможностей пакета (использовался пакет MAPLE VI) далее анализируются задачи высшей математики по программе первого курса.

С помощью пакета MAPLE VI достаточно просто проводить аналитическое (в общем виде) взятие интегралов, нахождение производных, пределов и других математических преобразований. Пусть, например, необходимо найти производные от следующих функций $y = x^* \sin(\cos(x))$, $y = tg(x)$, вторую производную от функции $y = x^6/6$ и взять следующие интегралы:

$$\int x^3 e^x dx, \int_0^{\pi} \sin(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx$$

Для этого можно использовать команды `diff` и `int`, после выполнения, которых сразу получаем ответ.

$$\succ \text{diff}(x^* \sin(\cos(x)), x); \quad \sin(\cos(x)) - x^* \cos(\cos(x)) \sin(x)$$

$$\succ \text{diff}(\tan(x), x); \quad 1 + \tan(x)^2$$

$$\succ \text{diff}(x^6, x^2); \quad 30x^4$$

$$\succ \text{int}((x^3)^* \exp(x), x); \quad x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$$

$$\succ \text{int}(\sin(x), x = 0..Pi); \quad 2$$

$$\succ \text{int}(1/(x^2 + 6*x + 12), x = -\text{infinity}..\text{infinity}); \quad \frac{1}{3} \pi \sqrt{3}$$

`evalf(0/0);`

1.813799365

Как видно, язык описания выражений достаточно простой, причем система предусматривает возможность контроля ввода выражений путем переключения вида изображения в стандартном математическом виде или на языке системы. Для удобства можно предложить еще следующий прием, с использованием команды `Int` библиотеки `Student`.

$$\succ \text{with(student): } f := x -> 3*x^4 : \text{Int}(f(x), x) := \text{int}(f(x), x);$$

$$\int 3x^4 dx := \frac{3}{5} x^5$$

В этом случае выводится исходный интеграл и его решение. Такой метод использования пакета можно рекомендовать студентам при самостоятельной работе для контроля правильности решения.

Как уже отмечалось выше, в пакете можно находить пределы функций.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Найти пределы функций:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg(x)}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 1}{bx + c}.$$

Для этого можно использовать команду `limit`:

$$\succ \text{limit}(\text{exp}(x), x = \text{inf inity}); \quad \infty$$

$$\succ \text{limit}(1/x, x = 0, \text{right}); \quad \infty$$

$$\succ \text{limit}(1/x, x = 0, \text{left}); \quad -\infty$$

$$\succ f := (a^* x^2 + 1)/(b^* x + c): \text{Limit}(f, x = \text{inf inity}) = \text{limit}(f, x = \text{inf inity});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 1}{bx + c} = \frac{\text{signum}(a)\infty}{\text{signum}(b)}$$

Можно усложнить задачу и потребовать взять предел функции $y = f(x)$, не используя правило Лопиталья. Например, пусть требуется найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}.$$

Раскроем неопределенность вида $0/0$ методом домножения числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное числителю. В пакете MAPLE VI это действие выполняется в два этапа: сначала умножается числитель и упрощается с помощью команды `expand`:

$$\succ f1 := \text{exp and}(f^*(\text{sqrt}(1+x) + \text{sqrt}(1-x)));$$

$$f1 := \frac{2}{3}$$

Затем умножается знаменатель на ту же величину:

$$\succ f2 := (f1/(\text{sqrt}(1+x) + \text{sqrt}(1-x)));$$

$$f2 := \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

Используя теорию пределов можно проводить исследование функций.

При необходимости можно с помощью пакета MAPLE VI провести исследование поведения функции более точно, определяя необходимые аналитические параметры.

Литература

1. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3, R4, R5. –М.: СОЛОН, 1998,-400 с.
2. Маклаков Г.Ю., Маклакова Г.Г. Исследование алгоритма стереоскопической визуализации в математическом пакете MAPLE. В кн.: Графика XXI века. Сб. тез. Докл. 2001.-18-20.

УДК 517.956

Об одной смешанной задаче для уравнения параболического типа третьего порядка с кратными характеристиками

Ж.А. Балкизов

Нальчик, Институт прикладной математики и автоматизации

Кабардино-Балкарского научного центра РАН

E-mail: Giraslan@yandex.ru

В прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < h\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассматривается уравнение

$$Lu = u_{xxx}(z) + a_2(z)u_{xx}(z) + a_1(z)u_x(z) + b_2(z)u_{yy}(z) + b_1(z)u_y(z) + a_0(z)u = -f(z), \quad (1)$$

где $a_i(x, y) (i = 0, 1, 2)$, $b_j(x, y) (j = 1, 2)$, $f(z) = f(x, y)$ – заданные функции из класса $a_i(z) \in C_x^i(\bar{D})$, $b_j(z) \in C_y^j(\bar{D})$, $f(z) \in C(\bar{D})$, а $u(z) = u(x, y)$ – искомая функция.

По классификации дифференциальных уравнений высшего порядка, приведенной в монографии А.М. Нахушева [1] уравнение (1) относится к уравнениям параболического типа. В монографии Т.Д. Джураева [2] уравнения вида (1) названы уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u(z) = u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C_{x,y}^{3,2}(D)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.*

В данной работе исследуется следующая

Задача 1. Найти регулярное в области D решение уравнения (1) из класса $u_x \in C(D \cup \{x=0\})$, $u_{xx} \in C(D \cup \{x=0\} \cup \{x=r\})$, $u_y \in C(D \cup \{y=0\} \cup \{y=r\})$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_{xx}(0, y) + \alpha(y)u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_{xx}(r, y) + \beta(y)u(r, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 < y < h,$$

а также условиям периодичности по времени

$$u(x, 0) = u(x, h), \quad u_y(x, 0) = u_y(x, h), \quad 0 \leq x \leq r,$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\varphi_i(y) \in C[0, h]$, $i = \overline{1, 3}$ – заданные функции.

Обозначим

$$(u, v)_0 = \int_D u(z)v(z) dx dy, \quad \|u\|_0^2 = (u, u)_0 = \int_D u^2(z) dx dy$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть заданные функции $a_i(x, y)$ ($i = 0, 1, 2$), $b_j(x, y)$ ($j = 1, 2$), $\alpha(y)$, $\beta(y)$ таковы, что они обладают свойствами:

$$\begin{aligned} a_2(x, y) &\geq 0, \quad b_2(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D, \\ a_{2xx}(x, y) + b_{2yy}(x, y) - a_{1x}(x, y) - b_{1y}(x, y) + 2a_0(x, y) &< 0 \quad \forall (x, y) \in D, \\ a_{2x}(0, y) - a_1(0, y) + 2\alpha(y) &\leq 0, \quad a_{2x}(r, y) - a_1(r, y) + 2\beta(y) \geq a_2^2(r, y) \quad \forall y \in [0, h], \\ b_2(x, h) = b_2(x, 0), \quad b_{2y}(x, h) - b_{2y}(x, 0) &\geq b_{1y}(x, h) - b_{1y}(x, 0) \quad \forall x \in [0, r] \end{aligned}$$

Тогда для решения $u(z) = u(x, y)$ задачи A имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(z)\|_0 \leq M \|f(z)\|_0,$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от искомой функции $u(z)$.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979. 238 с.

УДК 518.12

Математические модели и численные методы гранулированных вычислений

С.А.Бутенков

Таганрог, Южный Федеральный университет

Вычисление многомерных интегралов является одной из фундаментальных проблем вычислительной математики. Традиционно при разработке кубатурных формул рассматриваются вопросы оценок точности формул при минимизации числа узлов. В последнее время исследователи получают в свое распоряжение высокопроизводительные вычислительные системы (ВВС). Уменьшается актуальность вопросов экономии вычислительных операций, но возникают новые специфические проблемы. Они связаны с тем, что в настоящее время существует большое разнообразие архитектур ВВС, а максимальная эффективность вычислений достигается только при учете в структурной организации применяемого численного метода архитектуры используемой ВВС. Решением проблемы является методика построения численных методов с изменяемой структурой графа вычислений на основе методологии пространственного гранулирования многомерных данных и вычислений на гранулах.

Введение

При разработке высокоэффективных реконфигурируемых вычислительных систем (РВС) максимальные показатели вычислительной эффективности достигаются только для алгоритмов, специально для них разработанных [1]. Математическую основу для методологии построения высокопроизводительных РВС предоставляет метод пространственной грануляции данных [2] Благодаря алгебраическим свойствам новых моделей пространственных гранул, алгоритмы для них могут представляться в виде различных типов информационных графов [1].

1. Основы моделирования пространственных гранул

В задачах вычислительной математики данные для численных методов обычно представляются в виде элементов (точек) некоторого векторного

пространства [3]. В ряде наших работ были введены методы представления данных путем покрытия подмножеств точек данных декартовыми гранулами [2]. При этом модели имеют достаточно богатую алгебраическую структуру (на основе алгебры определителей). Для плоскости ($n=2$) получаем варианты записи уравнений моделей в виде:

$${}^k G_2(x_{\min}^1, x_{\max}^1, x_{\min}^2, x_{\max}^2) = \begin{vmatrix} x_{k-1}^1 & 0 & 1 \\ x_k^1 & 0 & 1 \\ x_k^1 & f(x_{k-1}^1) & 1 \end{vmatrix}, \quad {}^{k+1} G_2(x_{\min}^1, x_{\max}^1, x_{\min}^2, x_{\max}^2) = \begin{vmatrix} x_k^1 & 0 & 1 \\ x_{k+1}^1 & 0 & 1 \\ x_{k+1}^1 & f(x_k^1) & 1 \end{vmatrix}, \dots (1)$$

Аналогичные модели можно записать для любой размерности вмещающего пространства n . Модели (1) имеют естественную геометрическую меру для использования в кубатурных формулах [4]. Это дает возможность решать, в частности, интегральные уравнения, к которым сводятся многие прикладные задачи [5].

2. Построение квадратурных формул на гранулах

В [3], [4] нами был введен ряд простых квадратурных формул, которые реализуются на параллельных и кластерных ВВС [3]. Используя свойства моделей (1), мы можем записать составную квадратурную формулу более высокого порядка точности (формулу трапеций) для параллельно-конвейерной реализации по [3]:

$$\int_a^b f(x^1) dx^1 = \begin{vmatrix} \left[\left(\sum_{k=1}^N [x_{k-1}^1 \cdot f(x_{k-1}^1)] \right) - \left(\sum_{k=1}^N [x_k^1 \cdot f(x_k^1)] \right) \right] & 0 & \frac{1}{2} \\ \left[\left(\sum_{k=1}^N [x_k^1 \cdot f(x_{k-1}^1)] \right) - \left(\sum_{k=1}^N [x_{k-1}^1 \cdot f(x_k^1)] \right) \right] & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + R(x^1) \quad (2)$$

Квадратурная формула (2) может модифицироваться на основе основных свойств определителя (1), при этом изменяется структура информационного графа, позволяя использовать (2) на параллельных, кластерных и чисто конвейерных РВС [1].

В частности, из нее можно получить базовый вариант квадратурной формулы Симпсона (параллельно-конвейерная реализация):

$$\int_a^b f(x^1) dx^1 = \left| \begin{array}{ccc} \left[4 \cdot \sum_{k=1}^N \left[2 \cdot x_{k-1}^1 \cdot f\left(\frac{x_{k-1}^1 + x_k^1}{2}\right) \right] - \sum_{k=1}^N \left[x_{k-1}^1 \cdot f(x_{k-1}^1) \right] + \sum_{k=1}^N \left[x_k^1 \cdot f(x_k^1) \right] \right] & 0 & \frac{1}{6} \\ \left[4 \cdot \sum_{k=1}^N \left[(x_{k-1}^1 + x_k^1) \cdot f\left(\frac{x_{k-1}^1 + x_k^1}{2}\right) \right] - \sum_{k=1}^N \left[x_k^1 \cdot f(x_{k-1}^1) \right] + \sum_{k=1}^N \left[x_{k-1}^1 \cdot f(x_k^1) \right] \right] & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| + R(x^1) \quad (3)$$

Отметим, что методическая погрешность введенных структурно-гибких квадратурных формул соответствует классической [5]. Но от выбранной структуры формулы существеннейшим образом зависит вычислительная погрешность, которая должна исследоваться методами структурных графов вычислений для каждой архитектуры [1].

3. Построение кубатурных формул на гранулах

Кубатурные формулы сводятся к двум основным типам [5]. Для первого варианта интеграл рассматривается как повторный и по каждой переменной используется своя одномерная квадратурная формула типа (2) или (3). Для второго варианта узлы выбираются с учетом минимизации остаточного члена при представлении многомерными моделями гранул (1).

Так, на основе модели (1) можно получить кубатурные формулы прямоугольников последовательного типа в параллельно-конвейерной реализации:

$$\iint_D f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = \left| \begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[x_{j-1}^2 \cdot f(x_k^1, x_j^2) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[x_j^2 \cdot f(x_k^1, x_j^2) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{Nx^1} \left[x_k^1 - x_{k-1}^1 \right] & 0 \end{array} \right| + R(x^1, x^2) \quad (4)$$

Используя свойства (1) можно получить составную кубатурную формулу (трапеций) в параллельно-конвейерной форме:

$$\iint_D f(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = \begin{vmatrix} 2 \cdot \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[x_{j-1}^2 \cdot f \left(x_k^1, \frac{x_j^2 + x_{j-1}^2}{2} \right) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ \sum_{k=1}^{Nx^1} \sum_{j=1}^{Nx^2} \left[(x_j^2 + x_{j-1}^2) \cdot f \left(x_k^1, \frac{x_j^2 + x_{j-1}^2}{2} \right) \right] & 0 & \frac{1}{Nx^1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{Nx^1} [x_k^1 - x_{k-1}^1] & 0 \end{vmatrix} + R(x^1, x^2) \quad (5)$$

На основе (1) и (4) можно получить формулы более высокого порядка точности.

Заключение

Нами получена структурно гибкая форма представления записи кубатурных формул, что позволяет варьировать алгоритм вычисления с учетом будущей реализации на РВС. В перспективе возможно получение аналогичных формул наибольшей точности, поскольку предложенные формулы используются на неравномерной сетке.

Литература

- [1] Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры.– Ростов н/Д : Изд.-во ЮНЦ РАН, 2009.– 344 с.
- [2] Бутенков С.А., Жуков А.Л. Информационная грануляция на основе изоморфизма алгебраических систем // Сб. трудов Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик, 12-18 июля 2009 г., с. 206-209.
- [3] Бутенков С.А. Методы информационной грануляции в параллельных вычислениях // Материалы 3-й Всероссийской научно-технической конференции «СКТ-2014», 29 сентября – 4 октября 2014 г., Дивноморское, Геленджик, т. 1., с. 99-104.
- [4] Нагоров А.Л. Методы математического моделирования процессов на гранулированных моделях физических сред // В сб. трудов Международной научной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование» ИВТ&ММ, Кемерово, 23-30 июня 2013 г., с.

134-137.

[5] Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.– М.: Наука, 1969.– 288 с.

УДК 517.941

Краевая задача шестого порядка

А.И. Вагабов

Махачкала, Дагестанский государственный университет,

e-mail: algebra-dgu@mail.ru

Известны трудности, связанные с решением задач алгебры, геометрии дифференциальных уравнений..., в случаях кратности корней соответствующих характеристических уравнений, относящихся к этим задачам. Не является исключением и теория рядов по собственным элементам спектральных задач для дифференциальных операторов порядков $n = 2, 3, 4, \dots$. В случае любого n и единственности характеристического корня (n -го порядка) решена задача n -кратной базисности в работе [1]. Однако, даже случай двух кратных характеристических корней не входит в схему решения работы [1], представляя значительные трудности. Они преодолены в работе [2] для оператора четвертого порядка. Путем конструктивного анализа резольвенты дифференциального оператора шестого порядка с двумя характеристическими корнями порядков 3, нами устанавливается базисность системы собственных элементов оператора

$$l(y) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^3 y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

с комплексным параметром λ и распадающимися корневыми условиями:

$$U_s(y) \equiv \frac{d^{s-1}y(0)}{dx^{s-1}} = 0, \quad s = \overline{1, 5}, \quad U_6(y) \equiv y(1) = 0. \quad (2)$$

Мы опираемся на фундаментальные решения уравнения $l(y) = 0$:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{\lambda x}, \quad y_4(x) = e^{-\lambda x},$$

$$y_5(x) = xe^{-\lambda x}, y_6(x) = x^2 e^{-\lambda x} \quad (3)$$

Отметим, что задача решается при распадающихся граничных условиях, все из которых заданы на одном конце интервала $(0,1)$, кроме одного. В классических случаях такие условия порождают нерегулярную задачу, кроме условий типа Штурма, см., например [3, с. 616].

Доказана основная

Теорема. Для любой шестикратно непрерывно дифференцируемой на $(0,1)$ функции $f(x), 0 \leq x \leq 1$, обращающейся в нуль с производными до девятого порядка включительно при $x=0,1$, справедлива формула разложения по корневым элементам задачи (1) – (2):

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{d^6 f(\xi)}{d\xi^6} d\xi = f(x) \quad (4)$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ – функция Грина этой задачи, а C_l – окружности с центром в начале λ -плоскости, радиусов l . Сходимость в (4) равномерная на $(0,1)$.

Список литературы

1. Вагабов А.И. n -кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с n -кратной характеристикой // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 2. 2016. С.555 –560.
2. Вагабов А.И. Спектральная задача с двумя двукратными корнями характеристического уравнения дифференциального пучка четвертого порядка // Успехи современной науки. Т. 3. № 5, 2016. С. 115-119.
3. Вагабов А.И. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по главным функциям обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. АН СССР. Серия матем. Т. 48, № 3. 1984. С. 614 – 630.

УДК 532 (075.8)

Движение газо- и парожидкостных потоков

Г.Ф. Гаджиева

Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

Рассмотрим движение двухфазного потока, являющуюся смесью двух сжимаемых сред, в каждой из которых отсутствует эффект прочности. Первая фаза является несущей средой (газ или пар) а вторая фаза (несомая) состоит из отдельных включений (капель или пузырей), непосредственным взаимодействием, между которыми пренебрегаем.

1. Вначале установим систему уравнений движения для описания среды с баротропными фазами. При отсутствии фазовых переходов, систему уравнений движения можем представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\rho_1(1-\varphi)] + \nabla[\rho_1(1-\varphi)\vec{u}_1] &= q_{*1}; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2\varphi) + \nabla(\rho_1\varphi\vec{u}_2) = q_{*2} \\ \rho_1(1-\varphi)\frac{d\vec{u}_1}{dt} &= \rho_1(1-\varphi)g - \nabla[(1-\varphi)p_1] - \vec{R}_* + (\vec{u}_{*1} - \vec{u}_1)q_{*1} \\ \rho_2\varphi\frac{d\vec{u}_2}{dt} &= \rho_2\varphi g - \nabla(\varphi p_2) + \vec{R}_* + (\vec{u}_{*2} - \vec{u}_2)q_{*2} \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \nabla), \quad \vec{R}_* = k_R(\vec{u}_1 - \vec{u}_2); \\ \vec{u}_{*i} &= k_i\vec{u}_i, \quad \rho_i = \rho_i(P_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

При течении потока среды пузырьковой структуры различия давлений в фазах не существенно. Поэтому в подавляющем большинстве случаев считается, что $P_1 = P_2 = P$. В этих условиях уравнение политропны для фаз запишутся так $\rho_i = \rho_i(P)$.

2. Теперь получим уравнения движения газо - и парожидкостного потока, когда условия баротропности фаз не удовлетворяется. В этом случае при отсутствии фазовых переходов, полная система уравнений движения двухфазной смеси, примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [\rho_1(1-\varphi)] + \nabla[\rho_1(1-\varphi)\bar{u}_1] &= q_{*1}; \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2\varphi) + \nabla(\rho_2\varphi\bar{u}_2) = q_{*2} \\
\rho_1(1-\varphi)\frac{d\bar{u}_1}{dt} &= \rho_1(1-\varphi)g - \nabla[(1-\varphi)P_1] - \bar{R}_* + (\bar{u}_{*1} - \bar{u}_1)q_{*1} \\
\rho_2\varphi\frac{d\bar{u}_2}{dt} &= \rho_2\varphi g - \nabla(\varphi P_2) + \bar{R}_* + (\bar{u}_{*2} - \bar{u}_2)q_{*2} \\
\rho_1(1-\varphi)\frac{dE_1}{dt} &= \rho_1(1-\varphi)\bar{g}\bar{u}_1 - \nabla[(1-\varphi)P_1\bar{u}_1] - \bar{R}_*\bar{u}_1 + Q^* + (E_{*1} - E_1)q_{*1} \\
\rho_2\varphi\frac{dE_2}{dt} &= \rho_2\varphi\bar{g}\bar{u}_2 - \nabla(\varphi P_2\bar{u}_2) + \bar{R}_*\bar{u}_2 - Q^* + (E_{*2} - E_2)q_{*2}
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u}_i \nabla); \quad \bar{R}_* = k_R(\bar{u}_1 - \bar{u}_2); \quad E_i = e_i + u_i^2 / 2; \\
E_{*i} &= e_{*i} + u_{*i}^2 / 2; \quad Q^* = K_Q(T_1 - T_2); \quad P = \rho_i R_i T_i, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

В системе (2) соотношения $P = \rho_i R_i T_i$ применимы, когда характерное время макропроцесса во много раз больше времени установления равновесия давления между фазами. В других случаях, необходимо задавать уравнение, связывающее давления в фазах смеси. Примером может служить формула Лапласа (в случае сферических частиц радиуса r) $P_1 - P_2 = 2\sigma/r$, где σ - коэффициент поверхностного натяжения.

УДК 532 (075.8)

Динамические и тепловые пограничные слои на

вращающемся теле с отсосом

Гадиева С.С.

Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

e-mail: sevinchadiyeva10@gmail.com

В нашей работе методика учета нелинейных членов используется для расчета пограничного слоя на вращающемся в однородном осевом потоке диска при наличии равномерного отсоса с его поверхности. Пусть различие температуры в осевом потоке и на диске относительно невелико. Поэтому рассмотрим осесимметричное стационарное течение несжимаемой среды с постоянными

физическими свойствами. Тогда в общепринятых обозначениях уравнения гидродинамического и теплового пограничных слоев на вращающемся теле (диске) имеют вид

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}, U \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{r} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, U \frac{\partial T}{\partial r} + W \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где U, V и W -радиальная, окружная (азимутальная) и осевая компоненты скорости среды; P -давление, T -температура, ρ -плотность, $\nu = \eta/\rho$ и χ - коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; η - коэффициент динамической вязкости; r, z -радиальная и осевая координаты.

Систему (1) следует интегрировать при граничных условиях

$$Z=0, U=0, V=\omega r, W=-k, T=T_0, z \rightarrow \infty, U \rightarrow ar, V \rightarrow 0, W \rightarrow -2az, T \rightarrow T_1 \quad (2)$$

где ω -угловая скорость вращения диска, k -скорость отсоса на его поверхности, T_0 -температура диска, T_1 -температура во внешнем потоке. Величину a примем постоянной пренебрегая тем самым влиянием вращения диска и отсоса на внешнее невязкое течение. Полагая в (1)

$$W(r, z) = -k + W_0(r, z) \quad (3)$$

и выделяя в правых частях уравнений члены, пропорциональные k , получаем

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial r} + W_0 \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + k \frac{\partial U}{\partial z}, U \frac{\partial V}{\partial r} + W_0 \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{r} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + k \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0, U \frac{\partial T}{\partial r} + W_0 \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая в (4) $U = rF(z), V = rG(z), \theta(z) = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, учитывая условие $(1/\rho)(\partial P/\partial r) = a^2 r$ и заменяя инерционные члены их средним значением по сечению пограничного слоя, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu \delta} \int_0^\delta 3F^2 dz - \frac{1}{\nu \delta} \int_0^\delta G^2 dz - \frac{2a}{\nu \delta} \int_0^\delta F dz - \frac{a^2}{\nu} = \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{\ell} \frac{dF}{dz} \\ \frac{1}{\nu \delta} \int_0^\delta 4FG dz = \frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{1}{\ell} \frac{dG}{dz}, \quad \ell = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \ell_1 = \frac{\chi}{\kappa}, \quad -\frac{2}{\chi h} \int_0^h \left(\int_0^z F dz \right) \frac{d\theta}{dz} dz = \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{1}{\ell_1} \frac{d\theta}{dz} \end{aligned} \quad (5)$$

где δ и h -толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев. Используем следующие граничные условия:

$$z = 0, F = 0, G = \omega, \theta = 0, z = \delta, F = a, G = 0, \frac{dG}{dz} = 0, z = h, \theta = 1, \frac{d\theta}{dz} = 0 \quad (6)$$

Интегрируя (5) с учетом (6), получим

$$F = \frac{Al\delta - a}{1 - \exp(-y_0)} [\exp(-y) - 1] + Al^2 y, G = \frac{\omega \exp(-y_0) [\exp(y_0 - y) - (y_0 - y) - 1]}{1 - \exp(-y_0) - y_0 \exp(-y_0)} \quad (7)$$

$$\theta = \frac{\exp(-x) + x \exp(-x_0) - 1}{\exp(-x_0) + x_0 \exp(-x_0) - 1}, y = \frac{z}{\ell}, y_0 = \frac{\delta}{\ell}, x = \frac{z}{\ell_1}, x_0 = \frac{z}{\ell_1}, \quad (8)$$

Для определения неизвестных A, δ и h необходимо решить систему уравнений

$$A = \frac{1}{\nu \delta} \int_0^\delta 3F^2 dz - \frac{1}{\nu \delta} \int_0^\delta G^2 dz - \frac{2a}{\nu \delta} \int_0^\delta F dz - \frac{a^2}{\nu \ell^2 [1 - \exp(-y_0) - y_0 \exp(-y_0)]} = \frac{1}{\nu \delta} \int_0^\delta 4FG dz$$

$$\frac{x_0^2 \exp(-x_0)}{\exp(-x_0) + x_0 \exp(-x_0) - 1} = h \int_0^h \frac{W_0}{\chi} \frac{d\theta}{dz} dz$$

которая с учетом (7),(8) принимает вид

$$A_0 = (A_0 - p^2) \delta_0^4 \left[\frac{3}{d^2} Q + \frac{6}{d^4} R + \frac{1}{d^2} \right] - (A_0 - p^2) \delta_0^2 \times \left[\frac{6p}{d} Q + \frac{6p}{d^3} R + \frac{2p}{d^2} \left(1 - \frac{d}{L}\right) - \frac{P}{d} \right] -$$

$$- 3p^2 Q + \frac{2p}{d} \left(1 - \frac{d}{L}\right) - \frac{\exp(-2d)}{[L - d \exp(-d)]^2} \left\{ \frac{1}{2d} [\exp(2d) - 1] + 1 + d + d^2/3 - 2 \exp(d) \right\} \quad (9)$$

$$A_0 = p^2 + \frac{1}{4\delta_0^4 D} + \frac{P}{2d^3 \delta_0^2 DL} \left[2 + d^2 - \exp(d) + \exp(-d) \right] \quad (10)$$

$$f \exp(-f) = -\frac{A_0 \delta_0^3 h_0}{dL} \left\{ \exp(-f) \left[\frac{h_0^2 L}{3\delta_0^2 \text{Pr}^2} - \frac{h_0}{\delta_0 \text{Pr} L} + \frac{2}{dL} \right] - \frac{2 \exp(-f) \text{Pr}}{dfL} [1 - \exp(-f/\text{Pr})] - \right.$$

$$- \frac{h_0^2 L}{\delta_0^2 \text{Pr}^2 f^3} \times \left[2 - 2(f+1) \exp(-f) - f^2 \exp(-f) \right] + \frac{2h_0}{\delta_0 f^2 \text{Pr} L} \times [1 - (f+1) \exp(-f)] -$$

$$\left. - \frac{2}{dfL} [1 - \exp(-f)] + \frac{2 \text{Pr}}{dfL(1 + \text{Pr})} \left[1 - \exp\left(\frac{f}{\text{Pr}} + f\right) \right] \right\} \quad (11)$$

$$d = \kappa_0 \delta_0, f = \kappa_0 h_0, \delta_0 = \delta(\omega/\nu)^{1/2}, h_0 = h(\omega/\nu)^{1/2} \text{Pr}$$

$$\text{Pr} = \nu/\chi, \kappa_0 = \kappa(\nu\omega)^{1/2}, p = a/\omega, A_0 = A\nu/\omega^2 + p$$

$$R = \frac{2 - 2(1+d) \exp(-d) + d^2}{2L}, L = 1 - \exp(-d), Q = \frac{(2d+1)[-3 - \exp(-2d) + 4 \exp(-d)]}{2d[1 - 2 \exp(-d) + \exp(-2d)]}$$

$$D = \frac{2 + d^2 - \exp(d) - \exp(-d)}{2d^4 L} + \frac{1}{d^5} [\exp(d) - 1] - \frac{1}{d^4} - \frac{1}{2d^3} - \frac{1}{6d^2}$$

Система уравнений движения для отдельных фаз смеси

П.Ф. Гахраманов, Г.Г. Багирова

Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

e-mail: polad49@mail.ru

Под двухфазными системами будем понимать такие потоки, составляющие которых существенно отличаются друг от друга своими физическими свойствами и в процессе совместного движения обмениваются массой, энергией и количеством движения. Ниже рассмотрим системы типа жидкость (или газ) - твердые частицы, газ - капли жидкости, жидкость - пузыри газа и др. Для дальнейшего анализа используем уравнения движения двухфазных систем, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии с учетом внешнего тепломассообмена. Эти уравнения справедливы для описания макросреды с любыми физическими свойствами:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = q_* \quad (1)$$

$$\rho \dot{\vec{M}}_* = \rho \vec{F}_* + \nabla \vec{\sigma}_* + (\vec{m}_* - \vec{M}_*) q_* + (\vec{i} \times \vec{\sigma}_x + \vec{j} \times \vec{\sigma}_y + \vec{k} \times \vec{\sigma}_z) \quad (2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} (e + u^2 / 2) = \rho (\vec{F} \cdot \vec{u}) + \operatorname{div}(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{u} - \vec{q}^*) + [(e_* + u_*^2 / 2) - (e + u^2 / 2)] q_* \quad (3)$$

Рассмотрим двухфазную смесь, состоящую из твердых частиц, капель или пузырей с несущей фазой (газом, паром или жидкостью). Нижний индекс $i = 1$ будем относить к параметрам несущей фазы, а $i = 2$ - к параметрам несомой (взвешенной) фазы. В соответствии с принятыми обозначениями ρ_1 и ρ_2 - истинные плотности веществ несущей и дисперсной фаз, $\varphi_1 = 1 - \varphi$ и $\varphi_2 = \varphi$ - соответственно их объемные концентрации. Пусть n число частиц дисперсной фазы в единице объема смеси (или числовая концентрация), тогда имеем

$$\varphi_2 = \varphi = n(4\pi a^3)/3, \quad \varphi_1 = 1 - \varphi \quad (4)$$

где a - размер твердых частиц, капель и пузырька, φ - объемная концентрация

дисперсных частиц. При этом приведенные (парциальные) плотности фаз ρ_{ni} , характеризующие массы фаз в единице объема смеси и в сумме определяющие плотность смеси ρ , равны

$$\rho_{n_1} = \rho_1\varphi_1 = \rho_1(1-\varphi), \quad \rho_{n_2} = \rho_2\varphi_2 = \rho_2\varphi, \quad (\varphi_1 + \varphi_2 = 1), \quad \rho = \rho_{n_1} + \rho_{n_2} \quad (5)$$

Выпишем дифференциальные уравнения переноса массы, импульса и энергии для отдельных фаз.

1. Уравнения переноса массы, для несущей (жидкой или газовой) фазы

$$\frac{d}{dt}[\rho_1(1-\varphi)] + \rho_1(1-\varphi)\nabla\bar{u}_1 = q_1 - \chi \quad (6)$$

для несомой фазы

$$\frac{d}{dt}(\rho_2\varphi) + \rho_2\varphi\nabla\bar{u}_2 = q_2 + \chi \quad (7)$$

2. Уравнения динамики, для несущей фазы

$$\rho_1(1-\varphi)\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t} + (\bar{u}_1\nabla)\bar{u}_1\right) = \rho_1(1-\varphi)\bar{F}_1 + \nabla[(1-\varphi)\bar{\sigma}_1] - \bar{R} + (\bar{u}_{*1} - \bar{u}_1)q_{*1} + (u_1 - u_\chi)\chi \quad (8)$$

для несомой фазы

$$\rho_2\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial t} + (\bar{u}_2\nabla)\bar{u}_2\right) = \rho_2\varphi\bar{F}_2 + \nabla[\varphi\bar{\sigma}_1] + \bar{R} + (\bar{u}_{*2} - \bar{u}_2)q_{*2} + (u_2 - u_\chi)\chi \quad (9)$$

3. Уравнения энергии, для несущей фазы

$$\rho_1(1-\varphi)\left(\frac{\partial E_1}{\partial t} + (\bar{u}_1\nabla)E_1\right) = \rho_1(1-\varphi)\bar{F}_1\bar{u}_1 + \nabla[(1-\varphi)\bar{\sigma}_1\bar{u}_1] - N + Q^* + \nabla[(1-\varphi)\bar{q}_1^*] + (E_{*1} - E_1)q_{*1} + (E_1 - E_\chi)\chi \quad (10)$$

для несомой фазы

$$\rho_2\varphi\left(\frac{\partial E_2}{\partial t} + (\bar{u}_2\nabla)E_2\right) = \rho_2\varphi\bar{F}_2\bar{u}_2 + \nabla[\varphi\bar{\sigma}_2\bar{u}_2] + N - Q^* + \nabla[\varphi\bar{q}_2^*] + (E_{*2} - E_2)q_{*2} + (E_\chi - E_2)\chi \quad (11)$$

Где $E_i = e_i + u_i^2/2$; $E_{*i} = e_{*i} + u_{*i}^2/2$; $E_\chi = e_\chi + u_\chi^2/2$, $i=1,2$. В уравнениях движения фаз (6)-(11): \bar{u}_1, \bar{u}_2 -скорости несущей и несомой фаз; q_{*1}, q_{*2} -удельная присоединяемая (или отсоединяемая) масса фаз; χ -удельная масса фазового перехода несущей фазы в несомую; $\bar{u}_{*1}, \bar{u}_{*2}$ -скорости присоединяемой (или отсоединяемой) массы фаз; \bar{u}_χ -скорость масс фазового перехода; \bar{F}_1, \bar{F}_2 -удельный вектор (отнесенные к единице объема) массовых сил, действующие на фазы; $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ -удельный тензор (рассчитанный на единицу площади) напряжения поверхностных сил,

действующие на фазы; \vec{R} -удельный вектор межфазных сил; N -удельная мощность межфазных сил; \vec{q}^* -вектор удельного теплового потока к фазам; Q^* - количество теплоты, воспринимаемое несущей фазы от несомой в единице объема; E_1, E_2 -удельные энергии фаз; E_*, E_χ -удельные энергии присоединяемой массы и фазовых переходов. Следует отметить, что приведенные выше уравнения (6)-(11), описывающие движения составляющих фаз смеси являются общими, так как при тех или иных допущениях из них как частные случаи могут быть получены предложенные ранее уравнения одно- и двухфазных сред. Из системы уравнений движения для отдельных фаз смеси (6)-(11), получим замкнутые системы уравнений для описания движения жидкости (или газа) с взвешенными твердыми частицами и газо- и парожидкостных систем.

УДК 532 (075.8)

К вопросу гидродинамики коллекторных теплообменных аппаратов

П.Ф. Гахраманов, Е.Ф. Гулиев

Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

e-mail: polad49@mail.ru

К теплообменным или распределительным устройствам коллекторного типа относятся аппараты, снабженные коллекторами для раздачи потока по проницаемой поверхности. Характерной особенностью этого класса теплообменных аппаратов является то, что по ходу движения теплоносителя вследствие оттока массы происходит изменение массового расхода основного потока. Основные проблемы, возникающие при разработке коллекторных систем., связаны с необходимостью обеспечить распределение потока среды между параллельными каналами по определенными закону (чаще всего равномерно) при минимальном падении давления. Процессы массопереноса в коллекторных теплообменных аппаратах и системах весьма сложны, и пока еще не решены точными методами гидродинамики. Поэтому в данной работе рассматривается решение этой (для практики важной) задачи с применением

общих уравнений движения потока с внешним массообменом. Решение приводится в квазиодномерной постановке. Для вывода динамических уравнений одномерного течения среды с непрерывным изменением массы, примем, что направление движение жидкости совпадает с гидродинамической осью (трубы, канала), а присоединения (или отсоединения) массы происходит под некоторым углом. Уравнение динамики совершенной жидкости с внешним массообменом является исходным для дальнейших выкладок:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + (\vec{u} - \vec{v})q, \quad q = \frac{d}{dt}(\ln m) \quad (1)$$

где \vec{v}, \vec{F} - вектор скорости и массовых сил; P, m, ρ - давление, масса и плотность жидкости; \vec{u} - вектор скорости присоединяемой (или отсоединяемой) массы; q - удельная присоединяемая (или отсоединяемая) масса жидкости. Проектируя векторное уравнение $\omega = B \cos(Z/2) \cos \omega t$, на соответствующие оси координат, запишем

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + (u_x - v_x)q, \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + (u_y - v_y)q, \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + (u_z - v_z)q. \end{aligned} \quad (2)$$

Умножим первое уравнение системы (2) на dx , второе на dy и третье на dz , сложив их и учитывая, что $v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d(v^2/2)$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и $\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP$, так как $P = P(x, y, z)$, представим выражение (2), в таком виде

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = (F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \frac{dP}{\rho} + [(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) - v^2] \frac{dm}{m} \quad (3)$$

Обозначим среднюю скорость струйки основного потока жидкости через v , а среднюю скорость струйки присоединяемой (или отсоединяемой) массы через u . Тогда можем написать $v_x = v \cos(\nu, x)$, $v_y = v \cos(\nu, y)$, $v_z = v \cos(\nu, z)$ и

$u_x = u \cos(u, x)$, $u_y = u \cos(u, y)$, $u_z = u \cos(u, z)$. Подставляя их в уравнение (3) и учитывая, что $[\cos(v, x)\cos(u, x) + \cos(v, y)\cos(u, y) + \cos(v, z)\cos(u, z)] = \cos(v, u)$, получим

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz - \frac{dP}{\rho} + (u_* - v)v \frac{dm}{m}, \quad (4)$$

где $u_* = u \cos(v, u)$ - проекция средней скорости струйки присоединяемой (или отсоединяемой) массы на направление средней скорости струйки основного потока жидкости. Примем во внимание, что действующие на жидкость массовые силы обладают потенциалом (это предположение можно сделать, потому, что массовой силой большей частью является сила тяжести, а это, как известно, имеет потенциал), т.е. существует функция $\Phi(x, y, z)$, которая удовлетворяет условию $F_x = \partial\Phi/\partial x$, $F_y = \partial\Phi/\partial y$, $F_z = \partial\Phi/\partial z$. Следовательно $F_x dx + F_y dy + F_z dz = d\Phi = -gdz$, (т.к. $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -g$ - ускорение силы тяжести).

Тогда уравнение (4) после преобразования примет вид

$$d\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z\right) = (k - 1) \frac{v^2 dm}{gm}, \quad (5)$$

где $k = u_*/v$; $\gamma = \rho g$ - удельный вес жидкости. Это и есть уравнение одномерного течения струйки совершенной жидкости с изменением массы. Из этого уравнение при отсутствии присоединяемой (или отсоединяемой) массы (т.е. если пренебречь членом $(k - 1)v^2 dm/mg$ - учитывающим переменность массы), как частный случай, получим известное уравнение Бернулли – Эйлера $d(v^2/2g + P/\gamma + z) = 0$, который является основным уравнением гидродинамики одномерного течения среды (при постоянстве массы жидкости).

УДК 004.5

Особенности использования пакета MATLAB в курсе высшей математики

М.Я. Гозалова

Сумгаит, Сумгаитский Государственный Технический Колледж,

e-mail: mehriban.g@mail.ru

При изучении курса высшей математики большая роль может быть отведена математическим пакетам (MathCAD, Maple, MatLab и др.). Пакеты дают возможность быстро провести необходимый численный эксперимент, проверить ту или иную гипотезу, испытать различные методы и подходы к решению задачи, выяснить границы использования метода.

В настоящее время все большее применение получает пакет MATLAB (MATrix LABoratory- матричная лаборатория), особенно для проведения сложных математических расчетов. Пакет является одной из наиболее мощных универсальных интегрированных систем математического проектирования. Система MATLAB была разработана К.Молером (С.В.Moler) и с конца 70-х гг. широко использовалась на больших ЭВМ [1,3]. В начале 80-х гг. Джон Литл (John Little) из фирмы MathWorks, Inc. разработал версии системы PC MATLAB для компьютеров класса IBM PC, VAX и Macintosh. В дальнейшем были созданы версии для рабочих станций Sun, компьютеров с операционной системой UNIX и многих других типов больших и малых ЭВМ. Сейчас свыше десятка популярных компьютерных платформ могут работать с системой MathLab [1].

Важными достоинствами системы являются ее открытость и расширяемость. Большинство команд и функций системы реализованы в виде текстовых *m*-файлов и файлов на языке Си, причем все файлы доступны для модификации. Пользователю дана возможность создавать не только отдельные файлы, но и библиотеки файлов для реализации специфических задач. Легкость модификации системы и возможность ее адаптации к решению специфических задач науки и техники привели к созданию десятков пакетов прикладных программ. Приведем характеристику некоторых пакетов, которые с успехом могут использоваться в преподавании прикладных вопросов высшей математики.

Fuzzy Logic Toolbox (определение переменных, нечетких правил и функций принадлежности; интерактивный просмотр нечеткого логического

вывода; современные методы: адаптивный нечеткий вывод с использованием нейронных сетей, нечеткая кластеризация).

Symbolic Math Toolbox (решение задач в символьном виде дифференцирование и интегрирование, вычисление сумм и произведений, разложение в ряды Тейлора и Маклорена, операции с полиномами, вычисление корней полиномов, решение нелинейных уравнений и другие всевозможные символьные преобразования). Следует отметить, что по возможностям символьной математики пакет сильно уступает специализированным системам компьютерной алгебры, таким как новейшие версии Maple и Mathematical.

NAG Foundation Toolbox (дискретное преобразование Фурье; обыкновенные дифференциальные уравнения: методы Адамса и Рунге-Кутты; уравнения в частных производных; интерполяция; вычисление собственных значений и векторов, поддержка комплексных и действительных матриц; аппроксимация кривых и поверхностей: полиномы, кубические сплайны, полиномы Чебышева; минимизация и максимизация функций: линейное и квадратичное программирование, экстремумы функций нескольких переменных; разложение матриц; решение систем линейных уравнений; статистические расчеты, включая описательную статистику и распределения вероятностей; корреляционный и регрессионный анализ: линейные, многомерные и обобщенные линейные модели; генерация случайных чисел: нормальное распределение, распределения Пуассона, Вейбулла и Коши).

Statistics Toolbox (реализация статистических вычислений и статистической обработки данных, генерация случайных чисел, векторов, матриц и массивов с различными законами распределения, а также множество статистических функций).

Optimization Toolbox (методы оптимизации функций ряда переменных: безусловная оптимизация нелинейных функций; метод наименьших квадратов и нелинейная интерполяция; решение нелинейных уравнений; линейное программирование; квадратичное программирование; условная минимизация нелинейных функций; метод минимакса; многокритериальная оптимизация).

Partial Differential Equations Toolbox (пакет содержит множество функций для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных).

Control System Toolbox (моделирование, анализ и проектирование систем автоматического управления – как непрерывных, так и дискретных при этом реализуются традиционные методы передаточных функций и современные методы пространства состояний).

Digital Signal Processing (DSP) (пакет прикладных программ для проектирования устройств, использующих процессоры цифровой обработки сигналов. Результаты моделирования и проектирования цифровых устройств с помощью этого пакета могут использоваться для построения высокоэффективных цифровых фильтров на современных микропроцессорах цифровой обработки сигналов).

Signal Processing Toolbox (моделирование и проектирование устройств обработки всевозможных сигналов, обеспечение их фильтрации и множества преобразований: моделирование сигналов и линейных систем; проектирование, анализ и реализация цифровых и аналоговых фильтров; быстрое преобразование Фурье; оценка спектров и статистическая обработка сигналов; параметрическая обработка временных рядов; генерация сигналов различной формы).

Image Processing Toolbox (цифровая обработка и анализ изображений: восстановление и выделение деталей изображений; работа с выделенным участком изображения; анализ изображения; линейная фильтрация; преобразование изображений; геометрические преобразования; увеличение контрастности важных деталей; цветовые преобразования; изменение палитры; преобразование типов изображений).

В последних версиях MATLAB появилась возможность готовить документы в текстовом процессоре Word 95/97/2000 со вставками в виде документов MATLAB и результатов вычислений, представленных в численном, табличном или графическом виде. Таким образом, становится возможной подготовка «живых» электронных книг, в которых демонстрируемые примеры

могут быть оперативно изменены. Представляется возможным менять условия задач и тут же наблюдать изменение результатов их решения.

Следует отметить еще одно из достоинств системы MATLAB. В нее входит ядро системы символьной математики (компьютерной алгебры) Maple V Release 5. Оно используется пакетами расширения Symbolic Math Toolbox и Extended Symbolic Math Toolbox, благодаря которым в среде MATLAB стали доступны новые возможности символьных и аналитических вычислений.

Особенностью системы MATLAB является то, что ее легко приспособить к решению нужных классов задач. Расширение достигается естественным путем и реализуется в виде создаваемых пользователем *m*-файлов. Эффективность разрабатываемых программ существенно повышается при использовании средств построения интерактивного графического интерфейса пользователя (GUI Builder), входящих в систему MATLAB.

Для иллюстрации возможностей использования пакет MATLAB в преподавании высшей математики были разработаны программы по разделу теории вероятностей и математической статистики [2]. Разработка программ проводилась в среде графического интерфейса GUIDE.

Разработанные программы позволяют наглядно представить изменение законов распределения случайной величины от параметров распределения. Предусмотрены различные режимы визуализации (изменение толщины линии графика распределения, цвета линии, видов маркеров). Одна из программ позволяет моделировать работу генератора псевдослучайных чисел с различными законами распределения. Предоставляется возможность наглядно продемонстрировать работу генератора и изучить влияние параметров распределения на сгенерированную последовательность чисел. Предусмотрено изменение объема анализируемой выборки, закона распределения генерируемой последовательности и параметров закона распределения. Программы являются интерактивными средами, которые позволят их использовать для совершенствования учебного процесса при преподавании вопросов прикладной математики.

Использование пакета MATLAB в учебном процессе позволит совершенствовать формы и методы самостоятельной работы студента при изучении курса высшей математики. Появляется возможность больше внимания уделить рассмотрению узловых вопросов курса за счет уменьшения затрат на рутинную вычислительную работу, развиваются творческие способности студентов.

Литература

3. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. –Спб.: БХВ Санкт-Петербург, 2002,-736 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. –М.: Высш. шк., 2001.-575 с.
5. Потемкин В.Г. Система MatLab 5 для студентов. Справочное пособие. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1998. -314 с.

УДК 511.176

Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence

T. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

tarasgoy@yahoo.com

Consider the Fibonacci sequence $\{F_n\}_{n \geq 0}$ having initial conditions $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and recurrence relation $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ with $n \geq 2$. The Fibonacci sequence has been generalized in many ways, some by preserving the initial conditions, and others by preserving the recurrence relation [3, 5]. We study a generalization $\{q_n\}_{n \geq 0}$ with initial conditions $q_0 = 0$ and $q_1 = 1$ which is defined by the recurrence

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{if } n \text{ is even,} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{if } n \text{ is odd,} \end{cases}$$

where a and b are nonzero real numbers. These sequences arise in a natural way in the study of continued fractions of quadratic irrationals and combinatorics on words or dynamical system theory (see, for example, [1, 2, 4] for more details).

Some well-known sequences are special cases of this generalization. Classical Fibonacci sequence is a special case of $\{q_n\}_{n \geq 0}$ with $a = b = 1$. The Pell sequence is

$\{q_n\}_{n \geq 0}$ with $a = b = 2$ and the k -Fibonacci sequence is $\{q_n\}_{n \geq 0}$ with $a = b = k$, for some positive integer k .

Explicit expressions for the first ten terms of sequence $\{q_n\}_{n \geq 0}$ are

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = a, \quad q_3 = ab + 1, \quad q_4 = a^2b + 2a, \quad q_5 = a^2b^2 + 3ab + 1, \quad q_6 = a^3b^2 + 4a^2b + 3a, \\ q_7 = a^3b^3 + 5a^2b^2 + 6ab + 1, \quad q_8 = a^4b^3 + 6a^3b^2 + 10a^2b + 4a, \quad q_9 = a^4b^4 + 7a^3b^3 + 15a^2b^2 + 10ab + 1.$$

Using Toeplitz-Hessenberg determinants with special entries q_i , we derive the following formulas with multinomial coefficients.

Proposition 1. *Let $n \geq 2$, except when noted otherwise. Then*

$$\sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} a^{-s_1-\dots-s_n} p_n(s) q_0^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_{2n-2}^{s_n} = (ab+2)^{n-2}, \\ \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\dots+s_n} p_n(s) q_1^{s_1} q_3^{s_2} \dots q_{2n-1}^{s_n} = -ab(ab+1)^{n-2}, \\ \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\dots+s_n} p_n(s) q_3^{s_1} q_5^{s_2} \dots q_{2n+1}^{s_n} = -ab, \\ \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-a)^{-s_1-\dots-s_n} p_n(s) q_4^{s_1} q_6^{s_2} \dots q_{2n+2}^{s_n} = 0, \quad n \geq 3, \\ \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-a^2b-2a)^{-s_1-\dots-s_n} p_n(s) q_6^{s_1} q_8^{s_2} \dots q_{2n+4}^{s_n} = (ab+2)^{-n}, \\ \sum_{s_1+2s_2+\dots+ns_n=n} (-1)^{s_1+\dots+s_n} (ab+1)^{n-s_1-\dots-s_n} p_n(s) q_5^{s_1} q_7^{s_2} \dots q_{2n+3}^{s_n} = -ab,$$

where the summation is over nonnegative integers satisfying $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n$ and

$$p_n(s) = \frac{(s_1 + \dots + s_n)!}{s_1! \dots s_n!} \text{ is the multinomial coefficient.}$$

We establish also two formulas expressing numbers q_i with even (odd) subscripts via recurrent determinants of tridiagonal matrices of order n .

Proposition 2. *For $n \geq 1$, the following formulas hold:*

$$q_{2n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2} q_{2i}} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -aq_3 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -aq_5 & q_2 & q_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -aq_{2n-3} & q_{2n-6} & q_{2n-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -aq_{2n-1} & q_{2n-4} \end{vmatrix}$$

and

$$q_{2n-1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2} q_{2i-1}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -bq_2 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bq_4 & q_1 & q_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -bq_{2n-4} & q_{2n-7} & q_{2n-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -bq_{2n-2} & q_{2n-5} \end{vmatrix}.$$

References

1. *Alp M., Irmak N., Szalay L.* Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula // *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.* – 2012. – № 81 (2). – P. 227–232.
2. *Edson M., Yayenie O.* A new generalization Fibonacci sequence and extended Binet's formula // *Integers.* – 2009. – № 9. – P. 639–654.
3. *Koshy T.* *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* – N. Y.: John Wiley & Sons, 2001.
4. *Yayenie O.* A note on generalized Fibonacci sequence // *Applied Mathematics and Computation.* – 2011. – № 217. – P. 5603–5611.
5. *Zatorsky R., Goy T.* Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences // *Journal of Integer Sequences.* – 2016. – № 19 (2). – Article 16.2.2.

UOD.517.97

On determination of initial function in mixed problem for a second order hyperbolic equation

H.F.Guliyev, V.N.Nasibzade

Baku State University, Sumgait State University,

e-mail: hkuliyev@rambler.ru, nasibzade87@mail.ru

In the paper we consider an inverse problem of determination of an initial function in a mixed problem for a second order hyperbolic equation. This problem is reduced to an optimal control problem and in the new problem the Frechet differentiability is proved, necessary and sufficient condition for optimality is derived,

an algorithm for finding the initial function in the case when the ball in $L_2(\Omega)$ is the set of admissible controls, is offered.

1. Introduction

Recently the inverse problems in connection with their applied and theoretical significance [1,2,3,4,5] turned into object of systematic study in all spheres of knowledge, wherein mathematical methods are applicable. Inverse problems of mathematical physics are of great importance rolls. As is known, many applied problems are reduced to inverse problems of mathematical physics [2,6]. Therefore, study of such problems by this or other method, is a very interesting problem. One of such approaches is the optimization method for solving inverse problems. This method was the best for parabolic equations [7]. In the present paper it is offered optimization statement of the problem for finding one initial function in the mixed problem for a second order hyperbolic equation. The problem is reduced to an optimal control problem and is studied by the methods of optimal control theory.

2. Problem statement

Let us consider a problem of determination of the functions $(u(x,t), v(x)) \in W_2^1(Q) \times L_2(\Omega)$ from the following relations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

where $\Omega \subset R^n$ is a bounded domain with the smooth boundary Γ , Q is a cylinder, $S = \Gamma \times (0,T)$ is a lateral surface of the cylinder Q , $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\Omega)$ are the given functions

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0(x,t)u,$$

where $a_{ij}(x,t) \in C(\bar{Q})$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t} \in C(\bar{Q})$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$,
 $(x,t) \in \bar{Q}$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x,t) \in C(\bar{Q})$ and

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 , \quad \mu = const > 0.$$

For the given function $v(x)$ problem (1)-(3) is a direct problem in the domain Q . Problem (1)-(4) is called an inverse problem to problem (1)-(3). Note that for each function $v(x) \in L_2(\Omega)$ boundary value problem has a unique generalized solution from $W_{2,0}^1(Q)$ [8].

We reduce problem (1)-(4) to the following optimal control problem: to minimize the functional

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u(x,T;v) - \varphi(x)]^2 dx \quad (5)$$

on the solutions of problem (1)-(3), where $u(x,t;v)$ is the solution of problem (1)-(3) that corresponds to the function $v(x)$. We call the function $v(x)$ a control. If we find a control $v(x)$ that delivers minimum value to functional (5), then additional condition (4) is fulfilled.

Now instead of problem (5), (1)-(3) we consider the following problem: to minimize the functional

$$J_{\beta}(v) = J_0(v) + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} v^2(x) dx \quad (\beta = const > 0) \quad (6)$$

in the convex closed set $V_d \subset L_2(\Omega)$ under constraints (1)-(3). We call this problem problem (6), (1)-(3), while V_d a class of admissible controls.

By the theorem from [9, p.13] in new problem (6), (1)-(3) there exists a unique element from V_d that minimizes functional (6).

3. Necessary and sufficient condition for optimality

Let $\psi = \psi(x,t;v)$ is a generalized solution from $W_{2,0}^1(Q)$ of the adjoint problem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + L\psi = 0 , \quad (x,t) \in Q, \quad (7)$$

$$\psi(x, T; v) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T; v)}{\partial t} = u(x, T; v) - \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$\psi|_s = 0. \quad (9)$$

Theorem. Let all our presupposed conditions on the data of problem (6), (1)-(3) be fulfilled. Then for optimality of the control $v_* = v_*(x) \in V_d$ (6) in problem (1)-(3) it is necessary and sufficient that the inequality

$$\int_{\Omega} (-\psi(x, 0; v_*) + \beta v_*(x))(v(x) - v_*(x)) dx \geq 0 \quad \forall v \in V_d,$$

where $\psi(x, t; v_*)$ is the solution of the adjoint problem (7)-(9) for $v = v_*(x)$, be fulfilled.

References

- [1] Tikhonov A.N., Arsenin V. Ya., *Methods for solving ill-posed problems* M. Nauka, 1974.
- [2] Kabanikhin S.I., *Inverse and ill-posed problems*. Novosibirsk, Siberian scientific publ. 2009.
- [3] Baygazov S.P., *Inverse boundary value problem with data on parallel characteristics for hyperbolic type equation*. IZV. Vuzov. Mathem. 2006, №4, 3-11.
- [4] Megraliyev Ya.T., Sattorov A.Kh., *Inverse boundary value problem with integral conditions for a second order hyperbolic equation*. Doklady Acad. Of Sciences of Tajikistan. №4/vol 53/2010, 248-256.
- [5] Safiullova R.R., *Inverse problem for a second order hyperbolic equation with time dependent unknown coefficient*. Vestnik South Ural State Univ. Ser. Mat. Simulation and programming, 6:4(2013), 73-86.
- [6] Lattes R., Lions J.L., *Quasilinear inversion method and its applications*, N. Mir, 1970.
- [7] Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V., *Extremal methods for solving ill-posed problems*. M. Nauka, 1988.
- [8] Ladyzhenskaya O.A., *Boundary value problems of mathematical physics*. M. Hayka, 1973.
- [9] Lions J.L., *Optimal control of systems described by equation partial derivative*. M. Mir, 1972.
- [10] Vasilev F.P., *Methods for solving extremal problems*. M. Nauka, 1981.

**Особенности математической обработки Гамма-резонансных
спектров метеоритов**

М.М.Гусйнов¹, В.С.Русаков², Э.Казанова¹

**¹ФГБУН Институт физики им.Х.И.Амирханова Дагестанского научного
центра РАН.**

Махачкала, Россия. E-mail: gusmagm@yandex.ru

**²Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова. Москва.
Россия**

Одним из наиболее эффективных и широко используемых в различных областях науки и техники спектральных методов, является ядерная гамма-резонансная (мёссбауэровская) спектроскопия (ЯГРС). Метод даёт богатую информацию об особенностях микроскопического (локального) характера в сочетании с информацией о кооперативных явлениях в конденсированных средах, в связи с чем, успешно применяется для изучения локально-неоднородных систем (ЛНС). К таким можно отнести и метеориты. Характерной особенностью метеоритов является нерегулярность структуры, неэквивалентность окружения мёссбауэровского ядра, неоднородность состава и, следовательно, сложность экспериментального спектра, состоящего из нескольких парциальных спектров – секстетов, дублетов и синглетов. Ядерные спектры метеоритов несут в себе разнообразную информацию о фазовом составе, особенностях кристаллической, электронной и магнитной структур каждой из фаз. Возникают, однако, известные трудности извлечения этой информации. Математическая обработка и физическая интерпретация параметров таких спектров имеют тенденцию неоднозначности, дают оценки параметров сверхтонких взаимодействий близкие к значениям их дисперсий и требуют дополнительных вычислительных процедур. Сложная структура спектров приводит к необходимости создания специальных методов анализа и обработки спектров с использованием современных математических и

программных средств. Важным при этом оказывается выбор метода извлечения новой информации из мёссбауэровского спектра, который сделает исследователь в зависимости от целей задачи и априорной информации об образце. Каждая задача требует конкретного метода обработки спектров, соответствующего специфике поставленной задачи. Для решения конкретных задач мёссбауэровской спектроскопии ЛНС нами (Русаков В.С., МГУ), в рамках комплекса MStools реализованы линейные методы обработки мёссбауэровских спектров – метод фильтрации, метод регуляризации и «метод невязки». Комплекс MStools состоит из десяти программ (предназначенных для расшифровки и анализа мёссбауэровских спектров и их параметров. Отличительной особенностью этих методов является то, что при этом не используется сколько-нибудь значимая априорная информация об объекте исследования, хотя эффективность результата обработки и его достоверность в существенной мере будут зависеть от достоверности и полноты априорной информации. В ряде случаев возникает необходимость решить задачу улучшения качества спектра – повышения разрешения или эффективного шумоподавления. Как правило, такая необходимость возникает, когда не хватает априорной информации об объекте исследования для успешного использования других методов анализа и обработки. Статистический шум в экспериментальном спектре или конечная ширина линии излучения источника могут в существенной мере скрыть те особенности спектра, которые несут в себе необходимую для исследователя информацию. Результатом решения такой задачи должен быть новый, преобразованный спектр, в котором в существенной мере повышено разрешение или эффективно подавлен шум. Данный метод обработки реализован в программе RESOL. Решение задачи улучшения качества спектра можно осуществить и с помощью восстановления функции распределения сдвига одиночной резонансной линии (программа DISTRI). В этом случае результат восстановления функции $p(v)$ интерпретируется как преобразованный спектр с более высоким качеством. Модельная расшифровка мёссбауэровских спектров с использованием

априорной информации об объекте проводится программой SPECTR, реставрация функций распределения параметров парциальных спектров – программой DISTRI, количественный фазовый анализ с использованием спектров эталонных образцов – PHASAN. В настоящей работе, с целью сравнения результатов обработки спектров с помощью различных программ, приведены примеры применения программы SPECTR из комплекса MStools (Русаков В.С., МГУ [1]) и программы UnivemMS (Институт физики РГУ) для модельной расшифровки спектров ядер ^{57}Fe в одном из фрагментов метеорита Челябинск [2].

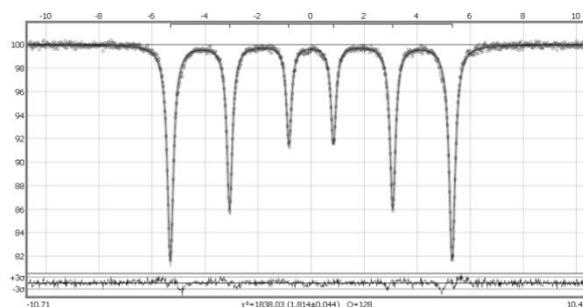


Рис.1. Калибровочный спектр альфа-Fe.

На рис. 1. представлен мёссбауэровский спектр стандартного (эталонного) резонансного поглотителя альфа-Fe (при источнике гамма-излучения – ^{57}Co в Cr) с помощью которого проводилась калибровка мёссбауэровского спектрометра MC-1104Em и относительно которого калибровались спектры ядер ^{57}Fe в фрагментах метеорита Челябинск в интервале температур 300-832 К. На рис. 2. представлен экспериментальный мёссбауэровский спектр ядер ^{57}Fe в фрагменте 2 метеорита Челябинск, снятый на спектрометре MC-1104Em при $T=832$ К и обработанный программой SPECTR. Структура спектра состоит из одного зеемановского секстета, трёх квадрупольных дублетов и одного синглета. Результаты обработки спектра, представленные ниже в таблицах приведены в том виде, в каком программа выдаёт их на экран компьютера.

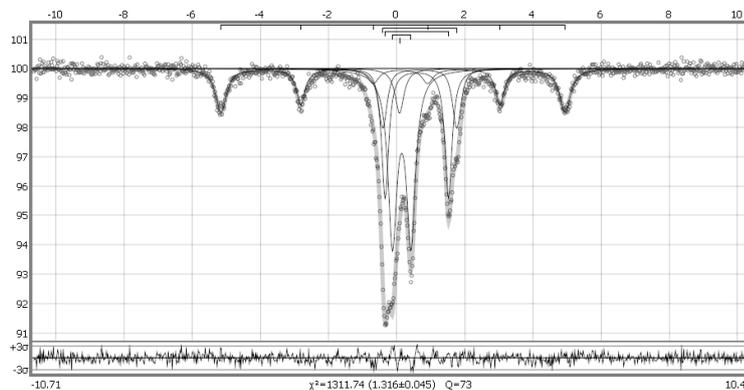


Рис.2. Spectrum data: D:\MOSSB\2016\метеорит Челябинск 2.141004_t30.T=832K.1S.1s2a.Co57-14.spc.

По характеру разностного спектра (нижняя часть рис.2.) видно, что аппроксимация экспериментального и теоретического (кривая Лоренца) спектров проведена достаточно полно. Проблема, кроме обозначенных выше, состоит и в том ещё, что разные программы по-разному представляют результаты обработки спектров, а число и характер извлекаемых из спектров важных параметров, вид их представления, точность численных значений параметров, как правило, также могут отличаться. Ниже приведён пример формы представления результатов обработки спектра (рис.2) по программе **СПЕКТР**. Обозначения и численные значения параметров здесь важны не сами по себе, но как пример для сравнения с результатами обработки того же экспериментального спектра другой программой – UnivemMS.

Форма представления результатов расшифровки спектра программой **СПЕКТР:**

1. PseudoVoigt sextet [simple] (⁵⁷Fe)

| | | |
|----------------------------------|--|----------------------------------|
| %I = 23.7±0.5% | I = 23000±600 imp×mm/s | I _n = |
| 0.0363±0.0010 mm/s | | |
| I = 0.212±0.006 | I ₂ / I ₁ = 0.667 | I ₃ /I ₁ = |
| 0.333 | | |
| δ = 0.0007±0.0031 | ε = -0.1102±0.0031 | H _n = |
| 312.97±0.23 | | |
| Γ ₁ = 0.388±0.014 | Γ ₂ /Γ ₁ = 0.812±0.029 | Γ ₃ /Γ ₁ = |
| 1.000 | | |
| α = 0.000±0.090 | | |
| I ⁽¹⁾ = 0.0531±0.0014 | v ⁽¹⁾ = -5.155±0.006 | Γ ⁽¹⁾ = |
| 0.388±0.014 | | |

| | | |
|-------------------------------|------------------------------|------------------|
| $I^{(2)} = 0.0354 \pm 0.0009$ | $v^{(2)} = -2.811 \pm 0.005$ | $\Gamma^{(2)} =$ |
| 0.315 ± 0.013 | | |
| $I^{(3)} = 0.0177 \pm 0.0005$ | $v^{(3)} = -0.687 \pm 0.005$ | $\Gamma^{(3)} =$ |
| 0.388 ± 0.014 | | |
| $I^{(4)} = 0.0177 \pm 0.0005$ | $v^{(4)} = 0.909 \pm 0.005$ | $\Gamma^{(4)} =$ |
| 0.388 ± 0.014 | | |
| $I^{(5)} = 0.0354 \pm 0.0009$ | $v^{(5)} = 3.033 \pm 0.005$ | $\Gamma^{(5)} =$ |
| 0.315 ± 0.013 | | |
| $I^{(6)} = 0.0531 \pm 0.0014$ | $v^{(6)} = 4.936 \pm 0.006$ | $\Gamma^{(6)} =$ |
| $=) 0.388 \pm 0.014$ | | |

2. PseudoVoigt doublet

| | | |
|----------------------------------|---|------------------|
| $\%I = 11.6 \pm 1.0\%$ | $I = 11200 \pm 1000 \text{ imp} \times \text{mm/s}$ | $I_n =$ |
| $0.0177 \pm 0.0015 \text{ mm/s}$ | | |
| $I = 0.104 \pm 0.009$ | $I_2/I_1 = 1.000$ | |
| $\delta = 0.678 \pm 0.005$ | $\varepsilon = 1.087 \pm 0.007$ | |
| $\Gamma_1 = 0.302 \pm 0.018$ | $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1.000$ | |
| $\alpha = 0.234 \pm 0.130$ | | |
| $I^{(1)} = 0.052 \pm 0.005$ | $v^{(1)} = -0.408 \pm 0.009$ | $\Gamma^{(1)} =$ |
| 0.302 ± 0.018 | | |
| $I^{(2)} = 0.052 \pm 0.005$ | $v^{(2)} = 1.765 \pm 0.007$ | $\Gamma^{(2)} =$ |
| 0.302 ± 0.018 | | |

3. PseudoVoigt doublet

| | | |
|------------------------------|---|--|
| $I = 22.5 \pm 1.1\%$ | $21800 \pm 1000 \text{ imp} \times \text{mm/s}$ | $I_n = 0.0343 \pm 0.0016 \text{ mm/s}$ |
| $I = 0.201 \pm 0.010$ | $I_2/I_1 = 1.000$ | |
| $\delta = 0.5909 \pm 0.0027$ | $\varepsilon = 0.9304 \pm 0.0023$ | |
| $\Gamma_1 = 0.250 \pm 0.007$ | $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1.000$ | |
| $\alpha = 0.026 \pm 0.070$ | | |
| $I^{(1)} = 0.100 \pm 0.005$ | $v^{(1)} = -0.340 \pm 0.004$ | $\Gamma^{(1)} = 0.250 \pm 0.007$ |
| $I^{(2)} = 0.100 \pm 0.005$ | $v^{(2)} = 1.5213 \pm 0.0029$ | $\Gamma^{(2)} = 0.250 \pm 0.007$ |

4. PseudoVoigt doublet

| | | |
|------------------------------|---|----------------------------------|
| $I = 37.3 \pm 1.1\%$ | $I = 36200 \pm 1000 \text{ imp} \times \text{mm/s}$ | $I_n = 0.0570 \pm 0.0016$ |
| mm/s | | |
| $I = 0.334 \pm 0.009$ | $I_2/I_1 = 1.000$ | |
| $\delta = 0.1488 \pm 0.0017$ | $\varepsilon = 0.2726 \pm 0.0020$ | |
| $\Gamma_1 = 0.314 \pm 0.005$ | $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1.000$ | |
| $\alpha = 0.000 \pm 0.050$ | | |
| $I^{(1)} = 0.167 \pm 0.005$ | $v^{(1)} = -0.1238 \pm 0.0034$ | $\Gamma^{(1)} = 0.314 \pm 0.005$ |
| $I^{(2)} = 0.167 \pm 0.005$ | $v^{(2)} = 0.4214 \pm 0.0016$ | $\Gamma^{(2)} = 0.314 \pm 0.005$ |

5. PseudoVoigt doublet

| | | |
|--|--|------------------------|
| $I = 4.9 \pm 1.0\%$ | $I = 4800 \pm 1000 \text{ imp} \times \text{mm/s}$ | $I_n =$ |
| $0.0075 \pm 0.0015 \text{ mm/s}$ | | |
| $I = 0.044 \pm 0.009$ | $I_2/I_1 = 1.000$ | |
| $\delta = 0.084 \pm 0.007$ | $\varepsilon = (0 \pm 8) \times 10^{-6}$ | |
| $\Gamma_1 = 0.314 \pm 0.005 = [4]\Gamma_1$ | $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1.000$ | |
| $\alpha = 0.000 \pm 0.400$ | | |
| $I^{(1)} = 0.022 \pm 0.005$ | $v^{(1)} = 0.084 \pm 0.007$ | $\Gamma^{(1)} = 0.314$ |
| $I^{(2)} = 0.022 \pm 0.005$ | $v^{(2)} = 0.084 \pm 0.007$ | $\Gamma^{(2)} = 0.314$ |

Видно, что программа SPECTR достаточно детально, с учётом погрешностей расчёта и полным охватом основных параметров спектра представляет результаты обработки.

Форма представления результатов расшифровки спектра программой UnivemMS

На рис. 3. приведён результат модельной расшифровки того же исходного спектра ^{57}Fe в том же фрагменте 2 метеорита Челябинск, но с помощью программы UnivemMS (Институт физики Ростовского госуниверситета). Структура обработанного спектра состоит из одного зеемановского секстета и двух квадрупольных дублетов. В отличие от спектра расшифровки программой SPECTR, здесь отсутствует один дублет и синглет. Эти параметры являются важными свидетелями присутствия в образце метеорита дополнительных неэквивалентных позиций ядер железа, а их отсутствие говорит или о том, что программа UnivemMS их не «заметила» или же, что, другая программа SPECTR, «перестаралась» в их обнаружении. Иными словами, грамотная обработка сложных, плохо разрешённых, а порой и практически неразрешённых спектров, состоящих из нескольких парциальных секстетов, дублетов и синглетов, характерных для локально-неоднородных систем, к которым относятся и метеориты, является не простой, но важной задачей для прикладной математики. Это говорит о разных возможностях разных программ, созданных с учётом разных целей и возможностей авторов, а также от выбранной модели обработки с учётом априорной информации об объекте. Подтверждением этому является пример формы представления результатов

расшифровки спектра в виде таблицы программой **UnivemMS**, приведённый ниже.

Форма представления результатов расшифровки спектра в виде таблицы (UnivemMS):

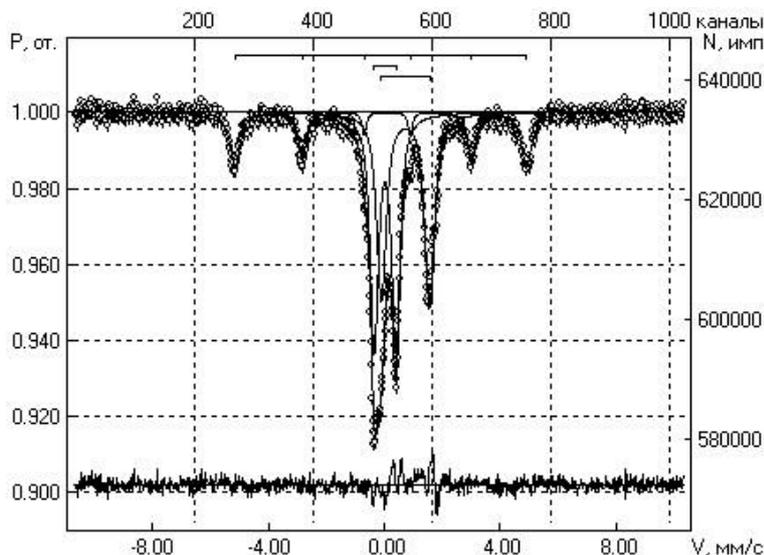


Рис.3. Модельная расшифровка спектра ядер ^{57}Fe в фрагменте 2 метеорита Челябинск при $T=832\text{ K}$.

Спектр: метеорит Челябинск
 2_141004_t30_T=832K_1S_1s2a_Co57-14.spc
 Калиброван относительно: Fe (КС: Magomed_spc)
 Абс.площадь эксп.спектра, б/р: 3.09324
 Абс.площадь расч.спектра, б/р: 3.09461 (100.04 % от эксп.)
 Макс.эксп.спектра (эффект),%: 8.730 +/- 0.126 (1.44 % от Max)
 $\chi_2 = 1.939$ (2.480 vs 1e6)
 Базис (фон), имп. = 634509 (прямая)
 Качество эксп.спектра = 70 (0.014 - погреш.эффекта)
 Длительность набора: 08:17:59 (8.29980000 - часов)

| 1. Компонента | 2. I_s , мм/с | 3. Q_s , мм/с | 4. H , кЭ | 5. S , отн.,% | 6. G , мм/с |
|---------------|-----------------|--------------------|------------------|-----------------------|---------------|
| 7. Sextet_1 | 8. 0.001 8 | 9. - 0.22 17 | 10. 13. 00 | 11. 21.34 (21.34) | 2. 0.432 2 |
| 13. Doublet_1 | 14. 0. 0365 | 15. 0 .752 3 | 16. | 7. 40.65 (40.65) | 8. 0.346 6 |
| 19. Doublet_2 | 20. 0. 7425 | 21. 1 .665 0 | 22. | 3. 38.01 (38.01) | 4. 0.403 0 |

Из приведённых данных видно, что в отличие от программы SPECTR, программа UnivemMS, во-1-х, выдаёт другую энергетическую структуру спектра, во-2-х, не все важные параметры определены, а значения рассчитанных параметров значительно отличаются от таковых по расшифровке SPECTR. В табл.1. приведены данные для изомерных сдвигов δ , квадрупольных расщеплений ϵ и сверхтонких магнитных полей H_n на ядрах железа, полученных в результате обработки одного и того же спектра ядер ^{57}Fe в фрагменте 2 метеорита Челябинск по программам SPECTR и UnivemMS. Как видно из таблицы 1. эффективные магнитные поля на ядрах железа, рассчитанные по программам SPECTR и UnivemMS практически совпадают по величине, а изомерные сдвиги и квадрупольные расщепления

Таблица 1. Сравнительные данные параметров спектров, рассчитанных по разным программам.

| | | |
|---------------------|--|---|
| 25. 26. SPECTR | 27. $\delta_1 =$ 0.678±0.00 5 | 28. $\epsilon_1 =$ 1.087±0.00 7 |
| | 29. $\delta_2 =$ 0.5909±0.0 027 | 30. $\epsilon_2 =$ 0.9304±0.0 023 |
| | 31. $\delta_3 =$ 0.1488±0.0 017 | 32. $\epsilon_3 =$ 0.2726±0.0 020 |
| | 33. $H_n =$ 312.97±0.2 3 | 34. |
| 35. 36. UnivemMS | 37. $\delta_1 =$ 0.0365 | 38. $\epsilon_1 =$ 0.7523 |
| | 39. $\delta_2 =$ 0.7425 | 40. $\epsilon_2 =$ 1.6650 |
| | 41. $H_n =$ 311.08 (17) | 42. |

значительно различаются, что может быть связано, в том числе, и с выбранной моделью расшифровки с учётом априорной информации об объекте. В этом и

состоит одна из особенностей расшифровки спектров сложных по составу, структуре и электромагнитном состоянии веществ, которая для адекватной интерпретации полученных в результате обработки спектров, требует от исследователя широкого кругозора знаний в разных областях наук, опыта и интуиции.

В заключение отметим, что получение объективной информации о физических процессах, происходящих в исследуемых объектах и скрытых в гамма-резонансных спектрах, представляет проблема, разрешение которой во многом зависит как от возможностей мёссбауэровских спектрометров, так и, особенно от возможностей программ математической обработки соответствующих спектров. В этой области в настоящее время достигнуты определённые успехи как в создании самих спектрометров высокого разрешения, так и в создании программ, но проблема пока остаётся из-за сложностей объектов исследования, в которых реализуются многокомпонентные структуры, а априорная информация о которых не всегда является полной. Одна из важных задач прикладной математики и состоит в том, чтобы оптимизировать процесс обработки спектров для получения наиболее точной и объективной информации об исследуемом веществе. Хотя программы комплекса MSToolse и охватывают практически все аспекты обработки и анализа мёссбауэровских спектров, но проблема извлечения реальной физико-химической и иной информации об объекте остаётся актуальной.

Литература

1. В.С. Русаков. Мёссбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем. Алматы. 2000.
2. M. Guseynov, S. Taskaev, I. Kamilov//Mossbauer Investigation of the Chelyabinsk Meteorite Fragment//Materials Science Forum. ISSN: 1662-9752, Vol. 845, pp 269-272 Revised: 2015-12-01//© 2016 Trans Tech Publications, Switzerland. doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.845.269.

Вывод расчётных формул по определению показателей процесса разработки двухпластовой системы

И.И.Джаббаров, И.С.Сафарли

Сумгаит, Сумгаитский Государственный Университет

Пусть область
двухпластового месторождения
разрабатывается N
прямолинейными рядами скважин,
расположенных от начала системы
координат на расстоянии.

$$r_i^2 = (x - na_i)^2 + (y - d_i)^2, i = \overline{1, N} \quad (1)$$

где n -порядковый номер скважины
в ряду, (na_i, d_i) -координаты точек
расположения скважин.

Считая процесс во времени
установится и усредняя поток
жидкости по толщинам пластов
будем иметь:

$$\frac{\partial^2 P_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_j}{\partial r} - (-1)^j \alpha_j (P_2 - P_1) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_j = k_\Gamma / k_j b_j b_\Gamma, j = 1, 2, \dots;$ k_Γ, b_Γ -соответственно, коэффициент
проницаемости, толщина перемычки.

Если в двухпластовой системе действует одна скважина, тогда общим
решением системы является выражения

$$P_j = c_1 + c_2 \ln r_1 - (-1)^j c_3 v_j k_0 (\omega r_1), \quad (3)$$

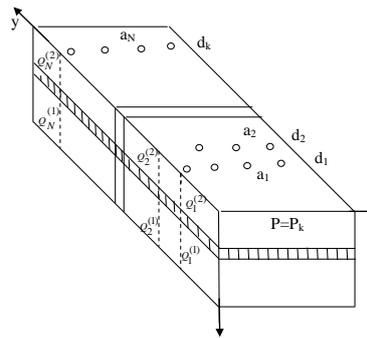


Рис 1. Общий вид двухпластовой системы со слабопроницаемой перемычкой, разрабатываемой многорядными батареями скважин

$$v_j = \begin{cases} 1 & j=1 \\ \alpha_2 / \alpha_1 & j=2 \end{cases}, \quad \omega^2 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

На аналогии с (3) при $i \leq N$ решением системы ввиду со линейности, является выражения

$$P_j = c_1 + \sum_{i=1}^N c_2^{(i)} \ln r_i - (-1)^j V_j \sum_{i=1}^N c_3^{(i)} k_0(\omega r_i), \quad (4)$$

где $k_0(z)$ - функции Макнальда, $c_m (m=1,2,3)$ постоянные, определяется из граничных условия задач.

Пользуясь условиями задания добитов скважина в рядах двухпластовой системы:

$$\left(r_i \frac{\partial P_j}{\partial r_i} \right)_{r_i \rightarrow 0} = A_i^{(j)}, \quad A_i^{(j)} = \frac{MQ_i^{(j)}}{2\pi k_j b_j}, \quad (i = \overline{1, N}; j = 1; 2). \quad (5)$$

Для коэффициентов под знаком суммирования в (4), можно найти следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_2^{(i)} - c_3^{(i)} &= A_i^{(1)}, \\ c_2^{(i)} + v_2 c_3^{(i)} &= A_i^{(2)}, \end{aligned}$$

(6)

$Q_i^{(j)}$ -дебит i -ой батареи скважин, расположенной в j -ом пласте двухпластовой скважины.

Из (6) имеем:

$$c_2^{(i)} = (1+v_2)^{-1} \cdot (A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)}), \quad c_3^{(i)} = (1+v_2)^{-1} (A_i^{(2)} - A_i^{(1)}) \quad (7)$$

Таким образом, подставляя (7) в (5) и производя суммирование, будем иметь:

$$\begin{aligned} P_1 &= c_1 + \frac{1}{1+v_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^N \left[\left(A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)} \right) \ln r_i + \left(A_i^{(2)} - A_i^{(1)} \right) k_0(\omega r_i) \right], \\ P_2 &= c_1 + \frac{1}{1+v_2} \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \left[\left(A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)} \right) \ln r_i - v_2 \left(A_i^{(2)} - A_i^{(1)} \right) k_0(\omega r_i) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Суммируя правые части в (8) по индексу n , можно получить

$$\begin{aligned}
P_1 &= c_1 + \frac{1}{1+v_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)} \right) \ln u_i(x, y) + \left(A_i^{(2)} - A_i^{(1)} \right) V_i(x, y) \right], \\
P_2 &= c_1 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)} \right) \ln u_i(x, y) - v_2 \left(A_i^{(2)} - A_i^{(1)} \right) V_i(x, y) \right],
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
u_i(x, y) &= ch \left(\frac{2\pi}{a_i} |y - d_i| \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{a_i} x \right), \\
V_i(x, y) &= \frac{\pi}{\omega a_i} \exp(-\omega |y - d_i|) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E_1} \cos \left(\frac{2\pi}{a_i} x \right) \exp \left(\frac{E_{1n}}{a_i} |y - d_i| \right), \\
E_{1n}^2 &= (\omega a_i)^2 + (2\pi n)^2.
\end{aligned}$$

Постоянную c_1 в (9) найдем из условия задания контура питания

$$P_j(x, y) = p_k \text{ при } y = 0.$$

с учетом найденного выражения для c_1 в (9) можно получить

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{1+v_2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)}}{A_1^{(1)}} \right) \ln \frac{u_i(x, 0)}{u_i(x, y)} + \frac{A_i^{(2)} - A_i^{(1)}}{A_1^{(1)}} [V_i(x, 0) - V_i(x, y)] \right\}, \\
\psi_2 &= \frac{1}{1+v_2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{A_i^{(2)} + v_2 A_i^{(1)}}{A_1^{(1)}} \right) \ln \frac{u_i(x, 0)}{u_i(x, y)} + \frac{A_i^{(2)} - A_i^{(1)}}{A_1^{(1)}} [V_i(x, 0) + v_i(x, y)] \right\}, \\
\psi_j &= (P_k - P_1) / A_1^{(1)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Решения (10) описывает изменения давление в произвольных точках двухпластовой системы, обладающей контуром питания и разрабатываемой N прямолинейными батареями скважин.

Литература

1. Джаббаров И.И. – Взаимодействие прямолинейных бесконечных батарей скважин в много пластовых системах. Изв. Ан Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. Наук №6, 1978
2. Лаврентьев М.А., Шабат В.В. Методы теории функции комплексного переменного. Изв-во физ.мат, 1958

Классы функций типа псевдогогнутых и их приложения

Л.М. Джамбетова, А.Я. Якубов, Л.Д. Шанкишвили

Грозный, Чеченский государственный университет

Тбилиси, Грузинский Технический университет

Аннотация

В работе вводятся классы функций типа псевдогогнутых - псевдовыпуклых вида (A): $A^{\gamma(t)}$, $A_{\lambda(t)}$, $A_{\lambda(t)}^{\gamma(t)}$ и вида (W): $W^{\gamma(t)}$, $W_{\lambda(t)}$, $W_{\lambda(t)}^{\gamma(t)}$ с функциональными параметрами. Приводится полное описание таких классов, включая некоторые их приложения. Установлена их связь с общеизвестными классами типа Бари – Стечкина Φ и Φ_k , которые отвечают ситуации $\gamma(t) = 1$, $\lambda(t) = t^k, k = 1, 2, \dots$ и другими мажорантными классами.

Литература

- [1]. Абель Н.Х. [N.H. Abel]. *Aufiösung einer mtchanischen Aufgabt. Crelles journal für die reine und angewendte Mathematik*, Bd. 2. (1826).
- [2]. Вольтерра Вито (V. Volterra). Sulla inversione degli integrali definiti, Attid. Torino 1896; Atti, d.A.d.Lincel 1896.
- [3]. V. Volterra. *Lecon sur les équations integrales et les équations integro – differentielles*. Gauthier Villars. Paris, 1913.
- [4]. V. Volterra. Les associations biologiques au point de vue mathematique. *Hermann, Paris*, 1935.
- [5]. W. Okrasinski. Nonnegative solutions of some nonlinear integral equations. *Annal. Polon. Math.*, 44:209-218, 1984.
- [6]. W. Okrasinski. On a nonlinear Volterra equations. *Math. Methods Appl.Sci.*, 8:345-350, 1986.
- [7]. W. Okrasinski. On a non-linear convolution equation occurring on the theory of water percolation. *Annal. Polon. Math.*, 37:223-229, 1980.
- [8]. W. Okrasinski. On negative solutions of some nonlinear convolution equations. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. math. astron. et phys.*, 26(1):15-18, 1978.

[9]. W. Mydlaezyk. Remarks on α non-linear Volterra equation. *Ann. Polon. Math.*,53(3):227-232, 1991.

[10] J.A. Nohel. Problems in qualitative behavior of solutions of non-linear Volterra equations pages 191-214. "Nonlinear Integral Equations". Madisjn, Univ. Wisc. Press, 1964.

[11]. Н.К. Карапетянц, А.Я. Якубов. Уравнение свертки со степенной нелинейностью отрицательного порядка. *ДАН СССР*, (4) 1991. Т.320.С. 777-780.

[12]. А.Я. Якубов. Нелинейные интегральные уравнения типа вольтерровской свертки с нелинейностью псевдовыпуклого вида. Деп. ВИНТИ 22.07.1992. №2413-B92. 91 с.

[13]. А.Я. Якубов. Нелинейное уравнение Вольтерры с разностным ядром в случае степенной нелинейности. Деп. ВИНТИ 12.12.1991. №4607-B91.

[14] . А.Я. Якубов. Нелинейные интегральные уравнения типа вольтерровской свертки в случае степенной нелинейности. Деп. ВИНТИ 25.03.1992. №1018-B92.

[15].З.Б. Цалюк, М.М. Шамсутдинов. *Об ограниченности решения одного класса нелинейных уравнений*. В сб. "Мат. анализ", Краснодар, 1971. С. 63-71.

[16]. А.Ф. Верлань *Модели нелинейных интегральных уравнений Вольтерра*. Киев: Наукова думка, 1966. В сб. "Мат. моделир. и электр. цепи". Вып. 4. С.99-104.

[17]. A. Yakubov. Classes of pseudo-concave type functions and their applications. *Proceedings of Razmadze, Math. Inst.*, vol. 129(2002), 113-128.

О неравенствах П. Л. Чебышева в общих линейных пространствах со скалярным произведением.

Джамбетова Л. М., А.Я. Якубов, Л. Д. Шанкишвили

Грозный, Чеченский государственный университет

Грузия, Грузинский Технический университет

Аннотация

В данной статье доказывается критерий справедливости неравенств Чебышева в общем линейном пространстве со скалярным произведением. При

этом критерий справедливости интегральных неравенств Чебышева в классе произвольных измеримых на некотором n -мерном брус $\Omega_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ функций, а также их дискретные аналоги, являются следствиями полученных здесь общих результатов.

1. Список литературы.

2. [1] Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1954, стр. 576
3. [2] П.Л. Чебышев, *О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах*, Сообщ. и проток. зас. Мат. общ. при Харьковском Имп. Унив., II, 1882, 93-98.
4. [3] П.Л. Чебышев, *Об одном ряде доставляющем предельные величины интегралов при разложении подынтегральной функции на множители*, Приложение 57 тому Записок Имп. Академии наук, №4(1883), Полное Собрание Сочинений П.Л. Чебышева, Москва, Ленинград 1948, 157-169.
5. [4] А.Н. Коркин, Comptes rendus, ХСVI, 1883, №5, стр. 326.
6. [5] Н. Я. Сонин, *О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам*, Зап. Акад. Наук, т. VI, №6, 1898.
7. [6] Т. Е. Armstrong
8. [7] F. Franklin, *Proof of a theorem of Tschebyscheff's on definite integrals*, American Journ, of Math 7, 1885, 377-379
9. [8] H. Gauchman, *Some integral inequalities involving Taylor's remainder*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol.4, Issue 1, Article 1, 2003.
10. [9] С. Hermite, *Cours de la Faculte des Science de Paris*, 4-е литограф. изд., Paris, 1888.
11. [10] J. Pecaric, I. Peric, *Identities for Chebyshev functional involving derivatives of arbitrary order applications*, J. Math. Anal. Appl., 313,2006,475-483.
12. [11] A. Wagener, *Chebyshev's algebraic inequality and comparative statics under uncertainty*, University of Vienna, 2005, 1-11.
13. [12] A. Ya. Yakubov, *Convolutions of weakly synchronous functions*, Integral Transforms and Special Functions, 8(3-4): 287-298, 1999.
14. [13] H. Heining and L. Maligranda, *Chebyshev inequality in function spaces*, Real Analysis Exchange, 176 211-247, 1991-1992

**Об одном интегральном уравнении со степенным ядром с особенностью
типа Трикоми и его некоторые приложения**

М.М.Зайнулабидов, З.М.Зайнулабидова

Махачкала, ДГПУ

Аннотация. В статье исследовано интегральное уравнение со степенным ядром, где вместо подвижной особенности Коши рассматривается особенность типа Трикоми.

Получена формула обращения изучаемого уравнения и доказана теорема о связи особого интеграла с ядром Трикоми с интегралами со степенным ядром с особенностью типа Трикоми.

Ключевые слова: интегралы со степенным ядром с особенностью типа Трикоми, интегральное уравнение и формула его обращения.

Хорошо известно [см., напр.1 с 572] интегральное уравнение Абеля

$$\int_{-1}^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\mu} = f(x), 0 < \mu < 1 \quad (1)$$

и формула его обращения

$$\varphi(x) = \frac{\sin \mu \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-1}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\mu}} dt \quad (2)$$

Ядро в (1) имеет подвижную особенность при $x = t$ типа Коши.

Представляет определенный научный интерес исследовать интегральное уравнение

$$\int_{-1}^x \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1-xt} \right)^\mu \varphi(t) dt \equiv \int_{-1}^x \frac{(1-t^2)^\mu \varphi(t)}{[(x-t)(1-xt)]^\mu} dt = f(x), \quad (3)$$

в ядре которого вместо особенности типа Коши рассматривается особенность типа Трикоми .

С целью объединения обеих случаев в один вместо (3) разумно исследовать более общее уравнение

$$\int_{-1}^x \frac{(1-at^2)^\delta \varphi(t) dt}{[(x-t)(1-axt)]^\mu} = f(x), 0 < \mu < 1, \delta \geq 0, \quad (4)$$

которая при $\alpha=0$ совпадает с (1) , при $\alpha = 1$ и $\delta = \mu$ совпадает с (3), а при $0 < \alpha < 1$, $\delta \neq \mu$ занимает некоторое промежуточное положение.

В дальнейшем условимся ядро в (4) называть степенным ядром типа Трикоми.

Настоящая статья посвящена получению формулы обращения уравнения (4) и доказательству некоторых равенств о связи особых интегралов с ядром Трикоми и интегралов со степенным ядром типа Трикоми.

Теорема 1. При ограничениях на искомую функцию $\varphi(x)$, обеспечивающих существование интеграла в (4), решение $\varphi(x)$ уравнения (4) имеет представление

$$\varphi(x) = \frac{\sin\mu\pi}{\pi} \frac{(1+\alpha t^2)^\mu}{(1-\alpha t^2)^\delta} \frac{d}{dx} \left\{ (1+\alpha x^2)^{1-\mu} \int_{-1}^x \frac{(1-\alpha t^2)f(t)d(t)}{(1+\alpha t^2)[(x-t)(1-\alpha xt)]^{1-\mu}} \right\}, \quad (5)$$

для любой функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям существования и дифференцируемости интеграла в правой части (5).

Доказательство. В самом деле, из легко проверяемого равенства

$$(x-t)(1-\alpha xt) = \left[\frac{(1+\alpha)x}{1+\alpha x^2} - \frac{(1+\alpha)t}{1+\alpha t^2} \right] \frac{(1+\alpha x^2)(1+\alpha t^2)}{1+\alpha} \quad (6)$$

следует, что в результате замены переменных согласно равенствам

$$y = \frac{(1+\alpha)x}{1+\alpha x^2}, \quad \eta = \frac{(1+\alpha)t}{1+\alpha t^2} \quad (7)$$

уравнение (4) можно переписать в виде

$$\int_{-1}^y \frac{\varphi_1(\eta)d\eta}{(y-\eta)^\mu} = f_1(y), \text{ где } \varphi_1(\eta) = \frac{(1+\alpha t^2)^{2-\mu}\varphi(t)}{(1+\alpha)^{1-\mu}(1-\alpha t^2)^{1-\delta}},$$

$$f_1(y) = (1+\alpha x^2)^\mu f(x), \quad t = \frac{2\eta}{(1+\alpha)+\sqrt{(1+\alpha)^2-\varphi\alpha\eta^2}}, \quad x = \frac{2y}{(1+\alpha)+\sqrt{(1+\alpha)^2-\varphi\alpha y^2}}$$

формула обращения которого согласно (1) и (2) имеет представление

$$\varphi_1(y) = \frac{\sin\mu\pi}{\pi} \frac{d}{dy} \int_{-1}^y \frac{f_1(\eta)d\eta}{(y-\eta)^{1-\mu}} \quad (8)$$

Из (8), в результате перехода к переменным t и x согласно (7), без особого труда можно получить формулу (5), что и завершает доказательство теоремы.

Известны тождества [2] выражающие связь особых интегралов с ядром Коши и интеграла с ядром Абеля, которые применяются для сведения обобщенного уравнения Абеля к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши.

Имеют место аналогичные тождества, выражающие связь особых интегралов с ядром Трикоми и интегралов со степенным ядром типа Трикоми, которые могут быть применены для сведения обобщенного интегрального уравнения со степенным ядром типа Трикоми к сингулярному интегральному уравнению с ядром Трикоми.

В качестве примера установим тождества, аналогичные следующим двум тождествам

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-y}{1-\eta} \right)^{1-\mu} \frac{d\eta}{\eta-y} \int_{-1}^{\eta} \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\eta-\xi)^{\mu}} = ctg\mu\pi \int_{-1}^y \frac{\psi(\eta) d\eta}{(y-\eta)^{\mu}} + cosec\mu\pi \int_y^1 \frac{\psi(\eta) d\eta}{(\eta-y)^{\mu}}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\mu}} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi+1}{\eta+1} \right)^{1-\mu} \frac{\psi(\xi) d\xi}{\xi-\eta} = ctg\mu\pi \int_{-1}^y \frac{\psi(\eta) d\eta}{(y-\eta)^{\mu}} + cosec\mu\pi \int_y^1 \frac{\psi(\eta) d\eta}{(\eta-y)^{\mu}}, \quad (10)$$

которые взяты из [2] и отмечены в [1, с.574].

Теорема 2. В ограничениях на функцию $\varphi = \varphi(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, при которых для функции

$$\psi(y) = \psi \left[\frac{(1+\alpha)x}{1+\alpha x^2} \right] = (1 - \alpha x^2)^{\delta-1} (1 + \alpha x^2)^{2-\mu} \varphi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \delta \geq 0, \quad 0 < \mu < 1,$$

справедливы (9) и (10), имеют место следующее тождества:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{(1-x)(1-\alpha x)}{(1-t)(1-\alpha t)} \right]^{1-\mu} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{\alpha t}{1-\alpha t x} \right) dt \int_{-1}^t \frac{(1-\alpha \tau^2)^{\delta} \varphi(\tau) d\tau}{[(t-\tau)(1-\alpha \tau t)]^{\mu}} = \\ ctg\mu\pi \int_{-1}^x \frac{(1-\alpha t^2)^{\delta} \varphi(t) dt}{[(x-t)(1-\alpha x t)]^{\mu}} + cosec\mu\pi \int_x^1 \frac{(1-\alpha t^2)^{\delta} \varphi(t) dt}{[(t-x)(1-\alpha x t)]^{\mu}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{(1-\alpha t^2) dt}{[(x-t)(1-\alpha x t)]^{\mu}} \int_{-1}^1 \left[\frac{(\tau+1)(1+\alpha \tau)}{(t+1)(1+\alpha t)} \right]^{1-\mu} \left(\frac{1}{\tau-t} - \frac{\alpha \tau}{1-\alpha \tau t} \right) \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(1-\alpha \tau^2)^{1-\delta}} = \\ ctg\mu\pi \int_{-1}^x \frac{(1-\alpha t^2)^{\delta} \varphi(t) dt}{[(x-t)(1-\alpha x t)]^{\mu}} + cosec\mu\pi \int_x^1 \frac{(1-\alpha t^2)^{\delta} \varphi(t) dt}{[(t-x)(1-\alpha x t)]^{\mu}} \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Используя равенство (6) и осуществляя замену переменных согласно (7), правую часть I_1 равенств (11) и (12) можно представить в виде

$$I_1 = \frac{(1+\alpha)^{\mu-1}}{(1+\alpha x^2)^{\mu}} \left\{ ctg\mu\pi \int_{-1}^y \frac{\psi(\eta)}{(y-\eta)^{\mu}} d\eta + cosec\mu\pi \int_y^1 \frac{\psi(\eta)}{(\eta-y)^{\mu}} d\eta \right\}, \quad (13)$$

где $\psi(\eta) = (1 - \alpha t^2)^{\delta-1} (1 + \alpha t^2)^{2-\mu} \varphi(t)$.

Аналогичные рассуждения относительно внутреннего интеграла в (11), приводят к равенству

$$\int_{-1}^t \frac{(1-\alpha\tau^2)^\delta \varphi(\tau) d\tau}{[(t-\tau)(1-\alpha\tau t)]^\mu} = \frac{(1+\alpha)^{\mu-1}}{(1+\alpha t^2)^\mu} \int_{-1}^\eta \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\eta-\xi)^\mu}, \quad (14)$$

где $\xi = \frac{(1+\alpha)\tau}{1+\alpha\tau^2}$, $\psi(\xi) = ((1-\alpha\tau^2)^{\delta-1} (1+\alpha\tau^2)^{2-\mu} \varphi(\tau))$.

Имеет место легко проверяемое равенство

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{(1-x)(1-\alpha x)}{(1-t)(1-\alpha t)} \right]^{1-\mu} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{\alpha t}{1-\alpha t x} \right) dt = \left[\frac{(1-y)}{(1-\eta)} \right]^{1-\mu} \left[\frac{(1+\alpha x^2)}{(1+\alpha t^2)} \right]^{-\mu} \frac{d\eta}{\eta-y}, \quad (15)$$

где η и y определены равенствами (7).

С учетом (14) и (15) левую часть I_2 тождества (11) можно представить в виде

$$I_2 = \frac{(1+\alpha)^{\mu-1}}{(1+\alpha x^2)^\mu} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{(1-y)}{(1-\eta)} \right]^{1-\mu} \frac{d\eta}{\eta-y} \int_{-1}^\eta \frac{\psi(\xi)}{(\eta-\xi)^\mu} d\xi \quad (16)$$

Приравнявая I_1 и I_2 согласно (13) и (16) и сокращая на общий множитель, получим известное тождество (9), что и завершает доказательство (11).

Аналогичными рассуждениями без особого труда можно доказать и справедливость и равенства (12).

Из тождеств (11) и (12) вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[\frac{(1-x)(1-\alpha x)}{(1-t)(1-\alpha t)} \right]^{1-\mu} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{\alpha t}{1-\alpha t x} \right) dt \int_{-1}^t \frac{(1-\alpha\tau^2)^\delta \varphi(\tau) d\tau}{[(t-\tau)(1-\alpha\tau t)]^\mu} = \\ & = \int_{-1}^x \frac{(1-\alpha t^2) dt}{[(x-t)(1-\alpha x t)]^\mu} \int_{-1}^1 \left[\frac{(t+1)(1+\tau\alpha)}{(t+1)(1+\alpha t)} \right]^{1-\mu} \left(\frac{1}{\tau-t} - \frac{\alpha\tau}{1-\alpha\tau t} \right) \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(1-\alpha\tau^2)^{1-\delta}}, \end{aligned} \quad (17)$$

справедливость которого, с помощью формулы перестановки порядка интегрирования типа Харди Пуаннаре – Бертрана [1,6] можно установить и самостоятельно, хотя осуществить это достаточно волокитно.

Любопытно обратить внимание на (11), (12) и (17) при $\delta = 1$ и $\delta = 0$, как на особые частные случаи.

В заключении обратим внимание на то, что при $\alpha = 0$ из (11) и (12) получаем соответственно (9) и (10), а при $\alpha = 1$ имеем дело со случаем для чистого ядра Трикоми, хорошо известного в науке [см.напр.3,4,5], в силу чего можно считать (11) и (12) тождествами достаточно хорошо обобщающими равенства (9) и (10).

Показать, возможность применения тождеств (11) и (12) к исследованию интегральных уравнений с ядром Трикоми, подобно тому как (9) и (10) применяются к исследованию обобщенного уравнения Абеля [1, с. 575- 582], не представляет особого труда.

Литература

1. Гахов Ф.Д., Краевые задачи, М., 1977, с 640.
2. Самко С.Г., Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши, ДАН СССР 176, №5, 1967, с 1019 – 1022.
3. Трикоми Ф., О линейных уравнениях смешанного типа, М. – Л. Гостехиздат, 1947.
4. Бицадзе А.В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981, с 448.
5. Смирнов М.И., Уравнение смешенного типа, М., 1985, с 304
6. Мусхелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968 с 514

УДК 004.41

Конвейерная модель вычисления остатка по заданному модулю для потока чисел

В.М. Захаров, С.В. Шалагин, А.Ф. Хасьянов

Казань, ИТИС КФУ

Казань, КНИТУ-КАИ

Предложен конвейерный алгоритм вычисления остатка от деления произвольного двоичного числа заданной разрядности (делимое) на определенное постоянное значение (константу). Алгоритм реализован на основе одноптипных операций сравнения и сложения-вычитания частичных остатков от деления на указанную константу. Количество ступеней алгоритма заранее известно и зависит от разрядностей как делимого, так и константы. Определены оценки временной и аппаратной сложности предложенного алгоритма.

Ключевые слова: конвейерный алгоритм, остаток по заданному модулю

Операция вычисления значения по заданному модулю целого отличного от степени два числа (далее - Операция) используется для решения широкого круга задач. К ним относятся задача реализации рекуррентных преобразований над потоками чисел [1], тестирование и диагностика цифрового оборудования [2], задачи аппаратной реализации кодовых последовательностей и конгруэнтных генераторов псевдослучайных чисел (ГПСЧ) [3 - 6]. Операция является наиболее трудоемкой по критерию временной сложности, что критично для случаев, когда есть потребность в обработке больших объемов информации в специализированных устройствах [7 - 8] с использованием модульной операции. Примеры различных способов аппаратной реализации Операции представлены в [3 - 6]. При создании встроенных систем или прототипов различных устройств, использующих Операцию, актуальна задача ее реализации, в частности, на программируемых логических интегральных схемах (ПЛИС) класса FPGA [9 - 11]. В [12, 13] предложена модель Операции на основе конвейерного выполнения операции сложения остатков по модулю данного числа. Недостаток данной модели – большое количество операций сложения на каждом этапе вычисления остатка по заданному модулю. Кроме того, количество ступеней конвейера требуется подбирать эмпирически, что сопряжено с трудностями вычислительного характера для чисел большой разрядности.

Цель данной работы - предложить конвейерный алгоритм вычисления Операции и получить оценки временной и аппаратной сложности его реализации.

Пусть исходное число A представлено в виде степеней числа два:

$$A = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \dots + a_12 + a_0 \quad (1)$$

Представление A согласно (1) производится n -разрядным двоичным вектором $(a_{n-1} \dots a_0)$.

В предлагаемой модели вычисление значения остатка от числа A сводится к вычислению остатка от числа D_{n-1} : $A \equiv D_{n-1} \pmod{L}$ (A сравнимо с D_{n-1} по модулю L), где L есть p -разрядное двоичное число, $p < n$. D_{n-1} вычисляется по формуле:

$$D_{n-1} = a_{n-1}b_{n-1} + \dots + a_p b_p + a_{p-1}2^{p-1} + \dots + a_1 2 + a_0. \quad (2)$$

Коэффициенты b_i в (2) определены согласно условию вида:

$$b_i = \begin{cases} 2^i \bmod L & : D_{i-1} \leq 0 \\ 2^i \bmod L - L & : D_{i-1} > 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$D_{p-1} = a_{p-1}2^{p-1} + \dots + a_1 2 + a_0$, $D_i = D_{i-1} + a_i b_i$, $i = \overline{p, n-1}$. Значение $D_{p-1} \in [0, 2^p - 1]$.

Согласно (3), по определению модулярной арифметики, если $D_{i-1} > 0$, то значение $b_i \in [1-L, -1]$, в противном случае $- b_i \in [1-L, -1]$. Значения D_i , позволяющие вычислить коэффициенты b_i в формуле (2), $i = \overline{p, n-1}$, не превышают определенных границ, заданных величиной L , ее разрядностью p .

Имеет место

Утверждение. Значения величин $D_i \in [1-L, 2^p - 2]$, $i = \overline{p, n-1}$.

Согласно утверждению, $D_{n-1} \in [1-L, 2^p - 2]$. Поэтому для получения остатка M от деления A на L при условии, что $A \equiv D_{n-1} \pmod{L}$ справедливо выражение:

$$M = D_{n-1} + z, \text{ где } z = \begin{cases} -L & : D_{n-1} \geq L \\ 0 & : 0 \leq D_{n-1} < L \\ L & : D_{n-1} < 0. \end{cases} \text{ Вычисление остатка } M \text{ от деления числа } A$$

на число L производится согласно конвейерному алгоритму.

Этап $(i-p+1)$, $i = \overline{p, n-1}$. Вычисление значения $D_i = D_{i-1} + a_i b_i$, где

$$b_i = \begin{cases} 2^i \bmod L & : D_{i-1} \leq 0 \\ 2^i \bmod L - L & : D_{i-1} > 0 \end{cases}, \quad D_{p-1} = a_{p-1}2^{p-1} + \dots + a_1 2 + a_0.$$

Этап $(n-p+1)$. Получение $M = D_{n-1} + z$, где $z = \begin{cases} -L & : D_{n-1} \geq L \\ 0 & : 0 \leq D_{n-1} < L \\ L & : D_{n-1} < 0. \end{cases}$

Определены оценки временной и аппаратной сложности конвейерного вычисления остатков от деления на целое число разрядности p для потока чисел

разрядности n . Количество ступеней конвейера линейно зависит от разности $(n-p)$, а время задержки функционирования определяется максимальным временем задержки операций сложения с константой, вычитания константы, сравнения с константой, либо операцией мультиплексирования «4 в 1».

1. Молдовян Н.А. Алгоритмы аутентификации информации в АСУ на основе структур в конечных векторных пространствах/ Н.А.Молдовян// Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 12. – С. 163 – 177.
2. Латыпов Р.Х. Применение теории линейных последовательных машин в системах диагностики/ Р.Х.Латыпов, Ш.Р.Нурутдинов, Е.Л.Столов, Р.Г.Фараджев// Автоматика и телемеханика. – 1988. – №8.– С. 3 - 27.
3. Патент РФ № 2324972. Устройство для формирования остатка по произвольному модулю от числа/ Петренко В.И. и др. // 2008. Бюл. № 14.
4. Патент РФ № 2192092. Устройство для преобразования n -разрядного двоичного позиционного кода в двоичный код остатка по модулю m / Овчаренко Л.А., Турченяк В.И.// 2002. Бюл. № 30.
5. Патент РФ № 1785081. Устройство для формирования остатка по произвольному нечетному модулю от числа/ Бережной В.В., Червяков Н.И., Оленев А.А.// 1992. Бюл. № 48.
6. Шалагин С.В. Реализация на ПЛИС генераторов псевдослучайных последовательностей и средств их CRC-контроля/ С.В.Шалагин, Ф.Х.Кайбушев, Р.В.Зелинский// Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. – 2009. – № 2. – С. 57 - 61.
7. Кузелин М.О. Современные семейства ПЛИС фирмы Xilinx. Справ. пособие/ М.О.Кузелин, Д.А.Кнышев, В.Ю.Зотов. – М.: «Горячая линия – Телеком». 2004. – 440 с.
8. Зотов В.Ю. Проектирование встраиваемых микропроцессорных систем на основе САПР фирмы Xilinx/ В.Ю.Зотов. – М.: «Горячая линия – Телеком». 2006. – 522 с.
9. Захаров В.М. Аппаратная реализация умножения элементов поля Галуа на программируемых микросхемах архитектуры FPGA/ В.М.Захаров,

- Ш.Р.Нурутдинов, С.В.Шалагин// Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2001. – № 1. – С. 36 - 41.
10. Шалагин С.В. Экспериментальное исследование методики синтеза комбинационных схем на программируемых микросхемах класса FPGA/ С.В.Шалагин// Микроэлектроника. – 2004. – Т. 33, № 1. – С. 56 - 67.
11. Шалагин С.В. Умножение элементов расширений полей Галуа в базисе ПЛИС/FPGA/ С.В.Шалагин// Информационные технологии. – 2007. – № 12. – С. 22 - 27.
12. Захаров В.М. Алгоритм вычисления остатка по модулю и оценки его сложности/ В.М.Захаров, Е.Л.Столов, С.В.Шалагин// Информационные технологии. – 2010. – № 11. – С. 32 – 36.
13. Пат. 2421781 РФ МПК⁸ G06F 7/72, H03M 7/18. Устройство для формирования остатка по заданному модулю/ В.М.Захаров, Е.Л.Столов, С.В.Шалагин; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО Казан. гос. техн. ун-т. - № 2009138613/08; заявл. 19.10.2009; опубл. 20.06.2011, Бюл. № 17. – 12 с.: ил.

Сжатие изображений с помощью вейвлетов дробного порядка

Т.И. Ибавов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Вейвлеты дробной размерности ν определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\pi^{s-1} i^{s-1}}{\Gamma(\nu s + 1)} [1 - (-1)^s] x^{s-1} \\ \psi_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\pi^{s-1} i^{s-1}}{\Gamma(\nu s + 1)!} [1 - (-1)^s] (2x - 1)^{s-1} - \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi^{s-1} i^{s-1}}{\Gamma(\nu s + 1)} [1 - (-1)^s] \left(x - \frac{1}{2}\right)^{s-1}. \end{cases}$$

Теорема: Функция $\varphi_\nu(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \Gamma(\nu + 1)$ является

N –масштабирующей для любого целого $N > 1$. Масштабирующее соотношение для этой функции имеет вид:

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \Gamma(\nu + 1) \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \frac{\sin \pi(Nx - n)}{\pi(Nx - 1)}$$

где коэффициенты

$$h_{n,\nu} = \frac{\sqrt{N}}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \Gamma(\nu + 1).$$

называют фильтром или маской.

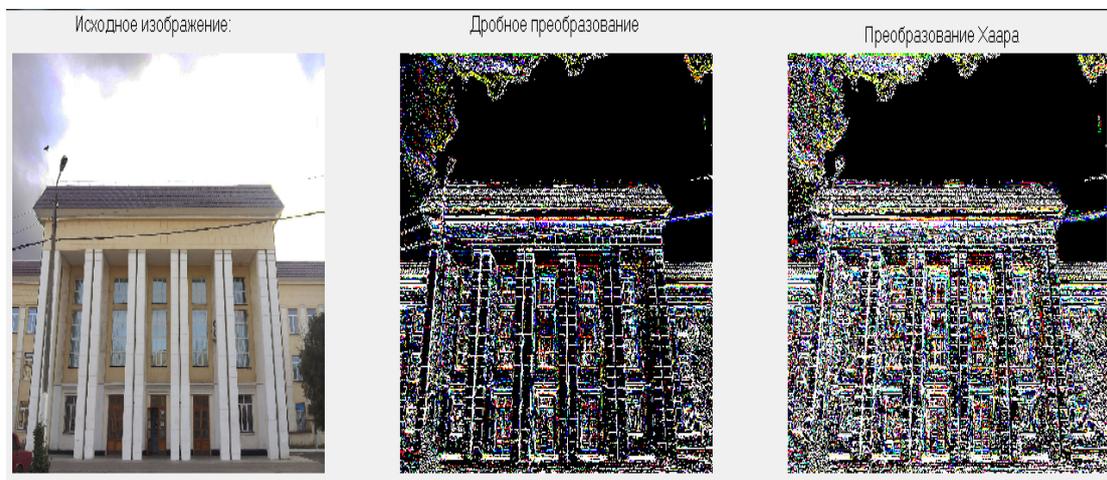
Из этой формулы при $n = 1, 2, 3, \dots$ получим коэффициенты h_1, h_2, \dots фильтра. Коэффициенты записываются в матрицу H и вейвлет преобразование W в матричном виде можно записать следующим образом $W = I * H$, где H -матрица коэффициентов, I - искомое изображение, W -вейвлет преобразование. Обратное вейвлет преобразование справедливо определять по формуле $W^{-1} = I * H^{-1}$, где H^{-1} – обратная матрица для матрицы коэффициентов H , I – сжатое изображение.

Предлагаемый алгоритм сжатия изображения с помощью вейвлетов дробного порядка:

1. Установить значение дробного параметра ν .
2. Загрузить изображение.
3. Конвертировать изображение в байтовый массив RGB-значений.
4. Перекодировать RGB на цветоразностные компоненты YCrCb.
5. Применить вейвлет преобразование в котором каждый пиксель искомого изображения сворачивается с фильтром из вейвлет коэффициентов.
6. Вычислить коэффициент сжатия преобразованного изображения.

Для сравнения предлагаемого алгоритма было также проведено преобразование Хаара . В результате проведенного эксперимента видно, что применение вейвлетов дробного порядка дает лучший результат, чем традиционные подходы для сжатия изображений. Эффективность

преобразования оценивалась вычислением коэффициента сжатия. Коэффициент сжатия изображения - это отношение исходного объёма изображения к объёму сжатого изображения.



Литература

1. Carlo Cattani, Hari M. Srivastava, Xiao-Jun Yang . "Fractional Dynamics". De Gruyter Open Ltd, Warsaw/Berlin, 2016.
2. Х. А. Джалаб, Р. В. Ибрахим. "Дробные маски основанные на обобщённом дробном дифференциальном операторе". Международный журнал Кибернетики, Информационных наук и Инженерии, 2013.

УДК 004.5

Верификация индивидуальных планов офисными средствами языка C#

З.И. Ибрагимова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Введение

Все использованные, но не определенные в данном сообщении термины и сведения можно найти в работе [1], где рассмотрена задача построения VBA-

проекта для вычислительного сопровождения процесса распределения кафедральной учебной нагрузки. Две причины – невысокие скоростные качества VBA-интерпретатора и известная неотчуждаемость VBA-кода от офисного документа – обусловили актуальность разработки C#-проекта с аналогичными целями. Востребованность качественного программного обеспечения, способного эффективно устранять вычислительные коллизии, возникающие при распределении учебных нагрузок, в последние 1-2 года усилилась в связи с пресловутой «оптимизацией» нормативов, т.к. соответственно ужесточились и требования к допускам расхождений фактически распределенных объемов часов от нормативных (эти допуски фактически сведены к нулю).

2. Функции авторского программного обеспечения

Основные входные данные: кафедральный план учебных нагрузок со структурой, подробно описанной в [1], и черновые варианты индивидуальных планов преподавателей (возможно, пустые), представленные в виде листов книги MS Excel.

В современных версиях C# доступ к рабочей книге MS Excel осуществляется без труда. Достаточно добавить в текущую папку две библиотеки – ClosedXML.dll и DocumentFormat.OpenXml.dll, подключить их через ссылки и прописать в программе: `using ClosedXML.Excel;` затем установить в программе полный путь (обозначим его FullName) к рабочей книге, содержащей кафедральный план и черновые индивидуальные планы преподавателей и некоторые другие рабочие листы, и соотнести:

а) рабочей книге – объект `workbook`:

```
XLWorkbook workbook = new XLWorkbook (FullName);
```

б) набору рабочих листов – массив `worksheet`:

```
int N = workbook.Worksheets.Count; IXLWorksheet [] worksheet = new  
IXLWorksheet [N].
```

После загрузки информации из рабочих листов книги в элементы массива worksheet:

```
for (int i = 0; i < N; i++ ) worksheet[i] = workbook.Worksheets.Worksheet(i+1);
```

разработка программы выполняется «традиционными» средствами языка программирования, без оглядки на особенности формата документов MS Excel.

Не вдаваясь в детали кода программы, ограничимся перечислением задач, решаемых авторским программным обеспечением:

1) проверить «внутреннюю согласованность» каждого индивидуального плана, т.е. проверить правильность вычисления сумм в контрольных строках 25 и 26 (за первый семестр), 50 и 51 (за второй семестр), 52 и 53 (за год); а также проверить правильность значений контрольных столбцов;

2) проверить присутствие в индивидуальных планах преподавателей некорректных учебных поручений двух типов: «неактуальные» -- отсутствующие в текущем кафедральном плане, и «блуждающие» -- ошибочно запланированные преподавателю в семестре, отличном от предписанного в кафедральном плане;

3) сформировать на одном рабочем листе выходные данные, содержащие интегрированное представление распределения – для каждой учебной дисциплины указать, каким преподавателям и сколько часов по каждому типу занятия распределено, а также – каковы расхождения распределения с фактическими значениями часов этой дисциплины по каждому типу занятий («внешняя согласованность»);

4) построить итоговую таблицу распределения учебной нагрузки в соответствии с форматом, определенным учебно-методическим управлением вуза;

5) автоматическое приведение сведений о численности академических групп в индивидуальных планах преподавателей к значениям, заданным в кафедральном плане.

3. Заключение

Все пять сформулированных задач решены полностью с использованием источников [2]-[5], авторское программное обеспечение представлено на получение свидетельства о регистрации в реестре Госпатента.

Отметим одну из перспектив работы. На практике процесс распределения нагрузок состоит из двух этапов: предварительного (например, заимствованного из прошлогоднего распределения), содержащего коллизии между обновленным планом кафедры и устаревшими индивидуальными нагрузками преподавателей, и финального – результата устранения этих коллизий. Коллизии эти, как правило, малосущественны (1-2 часа по каждому пункту), но ввиду многочисленности (100-200) их устранение занимает у распределителя неоправданно много времени. Поэтому перспективной представляется задача автоматической ликвидации малосущественных коллизий, не превышающих по абсолютному значению некоторой интерактивно устанавливаемой величины.

Литература

1. Н. Г. Кафурова. Программное обеспечение «Распределение учебных нагрузок»: вып. квал. работа бакалавра направления 02.03.02. Дагестанский. гос. университет, Махачкала, 2016.
2. И. Г. Фризен. Офисное программирование. Издательство: Дашков и Ко, 2008. – 270 с.
3. Эндрю Троелсен. Язык программирования C# 5.0 и платформа .NET 4.5 (6-е издание). Издательство: Вильямс, 2013 – 1310 с.
4. Джозеф Албахари, Бен Албахари. C# 5.0. Справочник. Полное описание языка (5-е издание). Издательство: Вильямс, 2013. - 1054 с.
5. Лабор В.В. Си Шарп: Создание приложений для Windows. – Мн.: Харвест, 2003. – 384 с.

УДК-517.9

**Смешанная задача для одной системы с акустическими
граничными условиями**

С. Э. Исаева

Бакинский Государственный Университет

Пусть $\Omega \subset R^N (N \geq 1)$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ_1 , а $\Omega_2 \subset \Omega$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ_2 ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$) и $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2$. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - \Delta u = f_1, \quad (x, t) \in \Omega_1 \times (0, T), \quad (1)$$

$$v_{tt} - \Delta v = f_2, \quad (x, t) \in \Omega_2 \times (0, T), \quad (2)$$

$$u = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3)$$

$$m\delta_{tt} + d\delta_t + k\delta = -\rho_0 u_t, \quad \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad u = v \quad (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad x \in \Omega_1, \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad v_t|_{t=0} = v_1, \quad x \in \Omega_2, \quad (6)$$

$$\delta|_{t=0} = \delta_0, \quad \delta_t|_{t=0} = \delta_1, \quad x \in \Gamma_2, \quad (7)$$

где $m, d, k, \rho_0: \Gamma_2 \rightarrow R$ известные функции, $\nu(x)$ внешний единичный вектор на Γ_2 .

Граничные условия (4) на границе Γ_2 называются акустическими граничными условиями, которые были введены в работе [1]. Похожие граничные условия были рассмотрены, например, в работе [2]. В данной работе доказана теорема о существовании слабого решения для задачи (1)-(7) (теорема 1).

Пусть $\hat{H} = \{u \in H^1(\Omega_1): \gamma_0(u) = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_1\}$. Предполагается, что

$$u_0 \in \hat{H}, \quad u_1 \in L^2(\Omega_1), \quad v_0 \in H^1(\Omega_2), \quad v_1 \in L^2(\Omega_2), \quad \delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2), \quad (8)$$

$$f_1 \in L^2(\Omega_1 \times (0, T)), \quad f_2 \in L^2(\Omega_2 \times (0, T)). \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (8)-(9) и $m, d, k, \rho_0 \in C(\bar{\Gamma}_2), m \geq 0, d > 0, k \geq 0$ для $\forall x \in \bar{\Gamma}_2$. Тогда задача (1)-(7) имеет слабое решение (u, v, δ) .

Литература

1. J.T.Beale, I. Rosencrans, Acoustic boundary conditions, Bull. Amer. Math.Soc. 80 (1974) 1276-1278.
2. A.T. Cousin, C.L.Frota, N.A. Larkin, On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions, J. Math. Appl. 293 (2004) 293-309.

УДК 532 (075.8)

Движения вязкой среды в двухфазных системах

Р.Ш. Исмаилов, У.В. Алимарданов

Политехнический государственный университет, Азербайджан

e-mail: ismailovrasim46@mail.ru

Известно, что любой реальный поток одно- и двухфазной жидкости, при движении встречает сопротивление, обусловленное вязкостью среды. При этом поток среды движущейся под действием внешней силы, на разных расстояниях от стенок имеет вследствие трения разной скорости, что вызывает градиент скорости в направлении перпендикулярное направлению движения потока среды. При этом полная величина напряжений в реальной среде представляет сумму давления и вязких напряжений. В тензорных обозначениях он записывается в виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1)$$

где δ_{ij} -символ Кронекера; p -давление; τ_{ij} -тензор вязких напряжений, определяемый выражением

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

где μ -коэффициент динамической вязкости. Для нормальных составляющих

тензора напряжений σ_{ii} можно написать

$$\sigma_{ii} = -P + 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right), \quad (3)$$

Для касательных напряжений σ_{ij} определяющим является соотношение

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

В тензорных обозначениях, выражения (2) и (4) можно записать в следующей форме

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Если в уравнение динамики $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = F_i + (u_{*i} - u_i)q + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$ подставить

значения компонентов тензора напряжений, согласно обобщенному закону Ньютона о вязкостном сопротивлении (5), получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + (u_{*i} - u_i)q \quad (6)$$

К уравнению динамики (6) следует присоединить еще уравнение неразрывности в форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \vec{u} - q) = 0 \quad (7)$$

Для изучения движения сжимаемой среды три уравнения движения и одно уравнение неразрывности недостаточно, так как в сжимаемой жидкости неизвестными является не только давления и скорости, но такие физические свойства, как плотность и вязкость. К таковым в первую очередь относится уравнение состояния, связывающее между собой давление, плотности и температуры $f(p, \rho, T)$, $p - \rho RT = 0$. Где R -газовая постоянная; T -абсолютная температура среды. С учетом выражения (1), (5), (7),

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad \text{и}$$

$$e = c_v T, \quad e_* = c_v T_*, \quad (8)$$

уравнение энергии $\rho \frac{de}{dt} = -(\nabla \bar{q}^* + N_*) + (e_* - e)q_*$, где $N_* = -(\bar{\sigma} \nabla \bar{u} + 0,5(\bar{u}_* - \bar{u})^2 q_*)$

представим в следующей форме

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p \nabla \bar{u} = \text{div}(\lambda \nabla T) + \bar{\tau} \nabla \bar{u} + 0,5 \rho (\bar{u}_* - \bar{u})^2 q + c_v \rho (T_* - T) q \quad (9)$$

Учитывая, что (согласно уравнению неразрывности)

$$p \nabla \bar{u} = p \left(q - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \quad \text{и} \quad (10)$$

$$D = \bar{\tau} \nabla \bar{u} = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + 0,5 \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} (\text{div} \bar{u})^2 \right] \quad (11)$$

или

$$D = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (12)$$

где D - диссипация энергии в потоке среды за счет работы вязкого трения, то уравнение (10) преобразуется к виду

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \text{div}(\lambda \nabla T) + D_* + c_v \rho (T_* - T) q, \quad (13)$$

где λ - коэффициент теплопроводности среды; c_v - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме; T_* - температура присоединяемой массы; D_* - диссипация энергии из - за работ вязких сопротивлений и присоединяемой массы:

$$D_* = D + \rho \left[0,5(\bar{u}_* - \bar{u})^2 - p / \rho \right] q \quad (14)$$

Зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от термодинамических величин обуславливается при помощи кинетической теории. Для определения зависимость между коэффициентом вязкости μ и температуры T , широко применяется степенная формула

$$\mu / \mu_0 = (T / T_0)^n \quad (15)$$

где T_0, μ_0 - абсолютная температура и коэффициент динамической вязкости, соответствующие некоторому начальному состоянию среды; n - показатель степени: $n = 0,5$ для сравнительно высоких температур и $n = 1$ для более низких. По Карману в среднем $n = 0,76$. Для определения коэффициента теплопроводности λ по известному коэффициенту динамической вязкости μ часто используется число Прандтля $Pr = \mu c_p / \lambda$ откуда

$$\lambda = (c_p / Pr) \mu \quad (16)$$

где c_p - теплоемкость при постоянном давлении. Отношение c_p / Pr постоянно для большинства газов. Таким образом, если массовые силы, $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ а также скорость $\vec{u}_*(u_{*x}, u_{*y}, u_{*z})$, температура T_* и интенсивность q присоединяемой массы рассматривать как заданные, то мы имеем восемь уравнений (6), (7), (15), (16) для определения восьми величин $u_x, u_y, u_z, P, \rho, T, \mu, \lambda$.

УДК 517.927

Система интегральных уравнений с точечными сингулярностями

С.В. Исраилов, А.А.Сагитов

Грозный, Чеченский государственный университет

Исследуется система вида

$$y_i(x) = f_i(x) + \int_c^x f_i(x, s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)) ds, i = \overline{1, n}, x, c \in (a, b), \quad (1)$$

в предположении непрерывности функций $f_i(x), f_i(x, s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s))$ в области

$D: \{x, s \in (a, b), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$ по всем их аргументам, но на концах

интервала (a, b) функции $f_i(x, s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)), i = \overline{1, n}$, имеют особенности

[1], т.е. сингулярности неинтегрируемого характера по x и s . Функции

$f_i(x), i = \overline{1, n}$, и в точках a и b считаются непрерывными. На функции

$f_i(x, s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)), i = \overline{1, n}$, в области D наложим следующие ограничения:

$$|f_i(x, s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s))| \leq \psi_i(x)\varphi_i(s), i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где функции $\psi_i(x), \varphi_i(s), i = \overline{1, n}$, непрерывны на интервале (a, b) ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi_i(x) = \lim_{x \rightarrow b} \psi_i(x) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

функции $\varphi_i(s), i = \overline{1, n}$, имеют неограниченные разрывы в точках a и b , на

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi_i(x) \int_x^c \varphi_i(s) ds = \lim_{x \rightarrow b} \psi_i(x) \int_c^x \varphi_i(s) ds = 0, c \in (a, b), i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\max_{0 \leq x \leq b} |f_i(x)| + \max\{M_{i1}, M_{i2}\} \leq d_i, i = \overline{1, n},$$

(5)

$$M_{i1} = \max_{a \leq x \leq c} \psi_i(x) \int_x^c \varphi_i(s) ds, M_{i2} = \max_{c \leq x \leq b} \psi_i(x) \int_c^x \varphi_i(s) ds, i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

При выполнении перечисленных условий система (1) имеет, по крайней мере, одно непрерывное решение [2] на $[a, b]$.

Литература

1. Оганджян В.Г. Условия полной непрерывности интегральных операторов с непрерывными особенностями в пространстве непрерывных функций. Дифференциальные уравнения, Август 1972, Т. VIII, №8, С.1474-1485.
2. Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала, АЛЕФ, 2011, С.439.

УДК 517.93

Краевая задача типа Коши с граничными условиями относительно производных для системы ОДУ

С. В. Исраилов, А.М. Гачаев

ЧГУ, ЧГПУ, КНИИ РАН ЧР

Аннотация. Для системы ОДУ задаются общие функциональные условия в точках $x_i, i = \overline{1, n}$, из $[a, b]$, квазиразрешимость относительно $y_i(x_i), i = \overline{1, n}$. Допускаются теоремы существования и единственности решения общей функциональной краевой задачи путем сведения к неограниченной системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: система ОДУ, функциональные краевые условия, теоремы существования и единственности, нагруженная система интегральных уравнений.

Доказательство теорем существования и единственности решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями в области $D: \{x, x_0 \in [a, b], |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

удовлетворяющим условиям вида

$$y_i'(x_0) = y_{i0}, i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $d_i, y_{i0}, i = \overline{1, n}$, данные числа, имеют прикладное значение при исследовании экстремальных свойств решений системы (1).

Например, при $y_{i0} = 0, i = \overline{1, n}$, точка x_0 будет точкой стационарности и выполнение условий при $x_0 \in (a, b)$

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{sign}(x - x_0) > 0, \quad (3)$$

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{sign}(x - x_0) < 0,$$

каждое решение задачи (1), (2) при $y_{i0} = 0, i = \overline{1, n}$, будет минимум или максимум в точке x_0 .

Если искать непрерывно-дифференцируемое решение $y_i(x), i = \overline{1, n}$, системы (1), удовлетворяющее условиям (2), то естественно выполняются и условия

$$f_i^*(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = y_{i0}, i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Если в (4) на $f_i, i = \overline{1, n}$, наложить ограничения обеспечивающее квазиразрешимость системы (4) относительно $y_i(x_0)$, то имеем

$$y_i(x_0) = f_i(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)), i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

В пространстве непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $C_n'(a, b)$ задач (1), (2) и (5) равносильна, причем краевая задача (1),(2) равносильна системе нагруженных интегральных уравнений

$$y_i(x) = F_i^*(y_1(x_0), y_2(x_i), \dots, y_n(x_i)) + \int_{x_i}^x f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) dt, i = \overline{1, n} \quad (6)$$

Методами работ [1,2] для системы (6) доказываются различные теоремы существования и единственности решения, которые справедливы для задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик, издательский центр «Эльфа», с.445, 2004.
2. Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала, «АЛЕФ», 2014, с.440.

УДК 517.93

Краевая задача для системы ОДУ с нелинейными функциональными условиями общего вида

Исраилов С.В., Гачаев А.М.,
ЧГУ, ЧГПУ, КНИИ РАН ЧР

Аннотация. В статье ставится специальная краевая задача для системы ОДУ, позволяющая исследовать экстремальные свойства решений в данной точке, которая приводится к системе интегральных уравнений с нагруженными частями. Доказываются теоремы существования и единственности решения.

Ключевые слова: краевые условия с производными, функциональные условия, точка стационарности, теорему существования и единственности, нагруженные интегральные уравнения.

В монографиях [1,2] исследованы для ОДУ краевые задачи с линейными и нелинейными функциональными условиями различных видов. Определенный научный интерес представляет задача вида

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$F_i(y_1(x_i), y_2(x_i), \dots, y_n(x_i)) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Условия (2) содержат в себе краевые условия многих задач (задача Коши, задача Николетти [1,2] и т.д.). Функции $f_i, i = \overline{1, n}$, считаются непрерывными в области $D: \{x \in [a, b], |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}\}$ по всем аргументам и удовлетворяют условиям Липшица для любых двух векторов $y = (y_i)_{i=1}^n$,

$z = (z_i)_{i=1}^n$ из области D :

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq L_i \sum_{j=1}^n |y_j - z_j|, i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где L_i, d_i - некоторые числа. Относительно $F_i, i = \overline{1, n}$, допускается возможность квазиразрешимости по диагональным элементам $y_i(x_i)$ системы (2) (здесь $x_i \in [a, b], i = \overline{1, n}$)

$$y_i(x_i) = F_i^*(y_1(x_i), y_2(x_i), \dots, y_n(x_i)), x_i \in [a, b], i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

и выполнение условий

$$|F_i^*(y_1(x_i), y_2(x_i), \dots, y_n(x_i)) - F_i^*(z_1(x_i), z_2(x_i), \dots, z_n(x_i))| \leq L_i \sum_{j=1}^n |y_j(x_i) - z_j(x_i)|, i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$L_i^*, i = \overline{1, n}$, известные числа.

Система нагруженных интегральных уравнений [1,2]

$$y_i(x) = f_i^*(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) dt, i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

равносильна краевой задаче (1),(2).

Допуская выполнения условий Липшица в отношении фазовых координат в функциях $f_i^*, f_i, i = \overline{1, n}$, методом работ [1,2] доказываются различные теоремы существования и единственности решения системы (6), что являются таковыми и для краевой задачи (1),(2).

Для $y_{i0} = 0, i = \overline{1, n}$, при выполнении условий (3) они будут и теоремами для существования экстремумов у решения в точке x_0 .

Литература

1. Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала, издательство «АЛЕФ», 2014, с.440.

2. Исраилов С.В., Юшаев С.С., Гачаев А.М. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и некоторые вопросы математического моделирования. Махачкала, издательство «АЛЕФ», 2014, с.206.

УДК 007:681.518.2

Эффективные алгоритмы грануляции многомерных числовых данных в системах обработки изображений

Н.С. Кривша, В. В. Кривша

Таганрог, Южный федеральный университет, ООО «Научно-исследовательский центр суперкомпьютеров и нейрокомпьютеров»

В работе рассматриваются алгоритмы грануляции многомерных числовых данных, которые используются в задачах обработки изображений на плоскости.

Разработанные

алгоритмы базируются на методах гранулирования данных, которые являются плохо формализованными. Определены ключевые параметры и характеристики алгоритмов-.

Введение

Существует большое количество известных методов и их модификаций, применяемых в области обработки и анализа изображений. В основе этих методов, как правило, лежит кластерный анализ, как один из ключевых этапов интеллектуального анализа данных. Подробный анализ методов кластерного анализа и распознавания образов провел J. Bezdec в [1]. Современные технологии сталкиваются с обработкой больших объемов информации, что является весьма трудоемким процессом. Кластерный анализ позволяет сокращать большие объемы информации и делает их компактными.

Задача грануляции сводится к разбиению исходного множества на гранулы, которые в принципе могут пересекаться между собой. Основное отличие гранулы от кластера заключается в возможном отсутствии общих свойств и признаков, объединяющих множество элементов в гранулу.

Классификация алгоритмов кластеризации и способы решения

Важной проблемой при реализации алгоритмов кластеризации является нетривиальная проблема выбора количества кластеров. Поэтому при построении алгоритмов кластеризации обычно используют перебор количества кластеров и определение оптимального значения в процессе этого перебора.

Алгоритмы разбиения множества на кластеры делятся на два типа: неиерархические, базирующиеся на укрупнении кластеров, и иерархические, где число кластеров заранее неопределено [2].

В свою очередь выделяют два подвида иерархических методов кластеризации: агломеративные, описывающие построение кластеров снизу вверх, и дивизимные, описывающие построение кластеров сверху вниз.

Одним из возможных подходов к решению этой задачи обработки и анализа изображений, где присутствует неопределенность как исходных данных, так и количества кластеров является применение новой идеи интеллектуализации манипулирования данными, который L. Zadeh назвал «теорией информационной грануляции» (ТИГ) [3].

Основные принципы построения подобных моделей данных изложены в работах [4]. В работах введены единые алгебраизированные модели представления подмножеств пространств с разными системами координат в виде покрытий выпуклыми элементами произвольной размерности (гранулами в терминологии L. Zadeh). Подобный подход представления данных в виде гранул обладает рядом преимуществ:

Гранула представляет собой декартово произведение;

Мерой информативности служит энтропия;

Техника мягких вычислений: пренебрегая точностью, получаем решение задачи;

В частности, в работе [4] показано, что развиваемый подход позволяет унифицировать структуру всех обработчиков многомерных данных на основе единого алгоритмического «ядра». Показано, что практически любая интеллектуальная обработка изображений в декартовых координатах может

выполняться с использованием ограниченного числа топологических отношений.

Алгоритмы гранулирования данных

Алгоритм 1. Гранулирование данных с помощью деления осей декартового произведения на интервалы.

Входные данные: Множество данных *Data*.

Выходные данные: множество гранулированных данных *Granules*.

Шаг 1. Покрыть исходное множество данных произвольными непересекающимися подмножествами *SubsetData_i* исходного декартова произведения.

Шаг 2. Инициализировать множество гранулированных данных *Granules = SubsetData*.

Шаг 3. Просматривая все подмножества *SubsetData_i* множества *Granules* произвести *процедуру оптимизации гранулы*.

Шаг 4. Вывести множество гранулированных данных *Granules*.

Основным требованием для подмножеств является неперекрываемость, т.е. $SubsetData_i \cap SubsetData_j = \emptyset$, $\forall i, j$. Данный алгоритм использует две вспомогательные процедуры:

Covering – предназначена для выделения произвольных непересекающихся подмножеств.

OptimizationGranule – производит оптимизацию гранулы, осуществляя идею сжатия гранулы или ее удаление в случае не информативности.

Алгоритм 2. Гранулирование данных с помощью задания меры информативности.

Входные данные: Множество данных *Data*, значение меры информативности *Info*.

Выходные данные: множество гранулированных данных *Granules*.

Шаг 1. Инициализировать множество гранулированных данных *Granules = Data*.

Шаг 2. Выполнить для каждой гранулы $Granules_i$ *процедуру оптимизации*.

Шаг 3. Вычислить меру информативности $Measure(Granules_i)$ всех гранул, включенных во множество $Granules$.

Шаг 4. Если $Measure(Granules_i) < Info$, заменить текущую гранулу двумя новыми, полученными в результате деления гранулы $Granules_i$ и вернуться к шагу 2.

Шаг 5. Вывести множество гранулированных данных $Granules$.

Представленный алгоритм также использует две основные процедуры:

- *OptimizationGranule* – производит оптимизацию гранулы, осуществляя идею сжатия гранулы или ее удаление в случае не информативности.
- *DivisionGranule* – осуществляет деление помеченной гранулы на две с учетом критерия информативности.

Заключение

В работе рассмотрены алгоритмы грануляции многомерных числовых данных, которые используются в задачах обработки изображений на плоскости. Представлены два подвида иерархических алгоритмов: агломеративный и дивизимный. Данные алгоритмы позволяют работать с плохо формализованными данными. Выбор одного из алгоритмов обусловлен поставленной задачей и разреженностью данных. Оба алгоритма могут быть полностью автоматизированы, что значительно упрощает процесс обработки изображений.

Литература

- [1] Bezdec J. C. On the Relationship between Neural Networks, Pattern Recognition and Intelligence. International Journal of Approximate Reasoning, 6, 85-107 p.p., 1992.
- [2] Барсегян А.А., Куприянов М.С., Степаненко В.В., Холод И.И. Методы и модели анализа данных OLAP и Data Mining. – СПб.: БХВ-Петербург. 2004. - 336с.

[3] Zadeh L. From Computing with Numbers to Computing with Words — From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions. IEEE Trans. // Circuits and Systems – Fundamental Theory and Applications. vol. 45. №1. 1999. 105-119 pp.

[4] Бутенков С.А., Кривша В.В., Аль-Доуяни С.Х.С. Построение системы нечетких отношений взаимного положения на декартовых гранулах // В сб. трудов международной научно-технической конференции „Искусственные интеллектуальные системы” (IEEE AIS’06).- М.: Физматлит. 2006. т.2. 99-105 с.

УДК.539.374

**Исследование динамических волн в полупространстве с учетом
неоднородности среды**

Н.Т. Курбанов, У.С. Алиева

Сумгаит, Сумгаитский государственный университет,

e-mail: qurbanov53@mail.ru

При исследовании волновых процессов в неоднородных и вязкоупругих средах основной проблемой является конструирование структуры с требуемыми свойствами, которые приводят к расширению возможностей их эффективного использования в новых областях техники. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [1,2,3] и показано, что учет неоднородности и вязкости среды приводит к значительным сложностям математического характера.

В работе исследуется распространение нестационарных волн в вязкоупругих неоднородных полупространствах с помощью интегрального преобразования Лапласа и Меллина для произвольных реологических функций.

Предположим, что в цилиндрических координатах поверхности неоднородного вязкоупругого полупространства по прямой $r = r_0, \theta = 0$ приложено касательное импульсивное напряжение

$$\sigma_{\alpha} = -\sigma_0 \delta(r - r_0) \delta(t) \quad (1)$$

где σ_0 - постоянная, $\delta(t)$ - дельта функция Дирака.

Считаем, что до момента времени $t=0$ система находится в покое, а при $t>0$ возникает смещение, параллельное оси oz и не зависящее от z . Тогда $U_r(r, \theta, t) = 0$, $U_\theta(r, \theta, t) = 0$, $U_z = U(r, \theta, t)$ и деформации определяются формулами

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial \theta}, \varepsilon_{rt} = \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial r}, \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

При этом уравнения движения будут в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

Определяющие соотношения принимаем в виде:

$$\sigma_{rt} = \frac{1}{2} \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{z\theta} = \frac{1}{2} \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon_{z\theta} \quad (4)$$

Предполагаем, что функция релаксации $R(t)$ не зависит от координат, а плотность материала ρ задается формулой

$$\rho = \frac{r_0^2}{r^2} \rho_0, \quad \rho_0 = const \quad (5)$$

Учитывая (2)-(15) в уравнении (3), получаем:

$$\int_0^t R(t-\tau) \left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) d\tau = 2r_0^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6)$$

Применяя к уравнению (6) преобразование Меллина по r и преобразование Лапласа по времени t получаем:

$$\frac{\partial^2 U^{ML}(s, \theta, p)}{\partial \theta^2} + \left(S^2 - \frac{r_0^2 p^2}{\bar{C}^2(p)} \right) U^{ML}(s, \theta, p) = 0 \quad (7)$$

где p и s параметры преобразований Лапласа и Меллина соответственно, $\bar{C}^2(p) = \frac{p\bar{R}(p)}{2\rho_0}$, через ML-обозначено совместное преобразование одноименных функций.

Решение уравнения (7), удовлетворяющее условию ограниченности имеет вид:

$$U^{ML}(s, \theta, p) = \frac{2\sigma_0}{p\bar{R}} \frac{r_0^s}{\sqrt{r_0^2 \frac{p^2}{\bar{C}^2(p)} - S^2}} \exp\left(-\theta \sqrt{r_0^2 \frac{p^2}{\bar{C}^2(p)} - S^2}\right) \quad (8)$$

Сначала рассмотрим упругое полупространство. При этом $pR^L = 2\mu = const$.

Поэтому вычисляя обратное преобразование Лапласа находим

$$U^M(s, \theta, t) = \frac{\sigma_0 C_0 r_0^S}{\mu \rho_0} I_0 \left(\frac{s C_0}{r_0} \sqrt{t^2 - \frac{\theta^2 r_0^2}{C_0^2}} \right)$$

где $C_0 = \frac{\mu}{\rho_0}$.

Вычисляя обратное преобразование Меллина получаем:

$$U(r, \theta, t) = \frac{\sigma_0 C_0}{\mu \pi} \frac{H \left(t - \frac{r_0}{C_0} \sqrt{\theta^2 + \ln^2 \frac{r}{r_0}} \right)}{\sqrt{C_0^2 t^2 - r_0^2 \left(\theta^2 + \ln^2 \frac{r}{r_0} \right)}} \quad (9)$$

Здесь $H(t)$ -единичная функция Хевисайда.

С помощью обобщенной теоремы умножения Эфроса с учетом (9) определяем оригинал смещения $V(r, \theta, t)$ для вязкоупругого полупространства

$$V(r, \theta, t) = \int_{\alpha}^t u(r, \theta, \tau) g(t, \tau) d\tau \quad (10)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{r_0}{C_0} \sqrt{\theta^2 + \ln^2 \frac{r}{r_0}}, \quad \bar{g}(p, \tau) = \frac{R(0)}{p\bar{R}(p)} \exp \left(-\tau \sqrt{\frac{R(0)}{p\bar{R}(p)}} \right)$$

функция $g(t, \tau)$ определена в работе [3].

Отметим, что при $t - \tau \ll 1$, которое соответствует прифронтным асимптотикам, функция $g(t, \tau)$ имеет приближенное выражение

$$g(t, \tau) \approx \delta(t - \tau) \exp \left(\frac{R'(0)}{2R(0)} \tau \right)$$

С учетом этой формулы из (10) получаем:

$$V(r, \theta, t) = \frac{\sigma_0 C_0}{\mu \pi} \frac{H \left(t - \frac{r_0}{C_0} \sqrt{\theta^2 + \ln^2 \frac{r}{r_0}} \right)}{\sqrt{C_0^2 t^2 - r_0^2 \left(\theta^2 + \ln^2 \frac{r}{r_0} \right)}} \times \\ \times \exp \left(\frac{R'(0)}{R(0)} \frac{r_0}{C_0} \sqrt{\theta^2 + \ln^2 \frac{r}{r_0}} \right)$$

Отсюда видно, что смещение для вязкоупругого полупространства на фронте волны также обладает скачком, а за фронтом волны затухает по экспоненциальному закону.

Литература

1. Аршинов Г.А. Исследование размеров, обеспечивающих устойчивости подземных полостей в вязкоупругих горных породах. Научный журнал Куб.ГАУ, 2004, №3, с.27-37.

2. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М: «Наука», 1982.

3. Курбанов Н.Т., Юсифли В.Н. Распространение нестационарных продольных волн в вязкоупругом двухслойном полупространстве. Россия, Научный журнал КУБ, 2014, №101(07), с.1-13.

УДК 311.2:519.2

Проверка нормальности результатов мониторинга электропотребления

С. А. Лавренченко

Москва, Российский государственный университет туризма и сервиса

Институт туризма и гостеприимства

e-mail: lawrencenko@hotmail.com

Мониторинг и контроль электропотребления лежат в основе методологии предотвращения кризисных ситуаций для управляющих компаний многоквартирными домами [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8]. Одним из результатов применения этой методологии является предложенный [4, 7] метод для прогнозирования уровня электропотребления с учётом фактора сезонности, исходя из двенадцати фактических данных электропотребления по месяцам этого года. Этот метод предложен на основе математической модели для мониторинга качества и контроля уровня электропотребления и позволяет пользователям отслеживать уровень электропотребления и вовремя уведомляться о любых отклонениях от теоретического уровня. В настоящей

работе обосновывается математическая модель [4, 7] для контроля уровня электропотребления по месяцам.

За эмпирическую основу исследования взяты реальные статистические данные за 2015 год по электропотреблению $y(m)$ на общедомовые нужды по месяцам m в одном конкретном московском многоквартирном доме. Соответствующий временной вариационный ряд $y(m)$, где $m = 1, 2, 3, \dots, 12$, представлен в таблице 1.

Цель математического моделирования – найти теоретический (расчетный) уровень электропотребления для данного временного вариационного ряда посредством какой-нибудь конкретной моделирующей функции $E(t)$ непрерывного времени t , которое измеряться также дискретно – месяцах m ($1 \leq m \leq 12$). Моделирующая функция должна учитывать систематические факторы, воздействующие на фактические (наблюдаемые) уровни $y(t)$ потребления электроэнергии, таким образом, что случайные отклонения $y(t) - E(t)$ фактических значений $y(t)$ от теоретических $E(t)$ являются результатом воздействия остаточных факторов. Ниже обосновывается предположение, что при каждом фиксированном значении t случайные показания счётчика потреблённой электроэнергии $y(t)$ в момент времени t распределены по закону, близкому к нормальному закону с математическим ожиданием $E(t)$ и постоянным стандартным отклонением σ . Описанный стохастический процесс стал основой предложенного в [4, 7] метода мониторинга и контроля электропотребления по месяцам.

Таблица 1 – Динамика потребления электроэнергии по месяцам

| | | | | | | |
|---------------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Месяц m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Градусный номер месяца | 15° | 45° | 75° | 105° | 135° | 165° |
| Радианный номер месяца | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{3\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{9\pi}{12}$ | $\frac{11\pi}{12}$ |

| | | | | | | |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Электропотребление $y(m)$ (кВт·ч) | 1001 | 787 | 826 | 646 | 675 | 650 |
| Продолжение таблицы 1: | | | | | | |
| Месяц m | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Градусный номер месяца | 195° | 225° | 255° | 285° | 315° | 345° |
| Радианный номер месяца | $\frac{13\pi}{12}$ | $\frac{15\pi}{12}$ | $\frac{17\pi}{12}$ | $\frac{19\pi}{12}$ | $\frac{21\pi}{12}$ | $\frac{23\pi}{12}$ |
| Электропотребление $y(m)$ (кВт·ч) | 704 | 807 | 876 | 813 | 757 | 1075 |

Для московского региона фактор сезонности рассматривается как основной, и поэтому теоретический уровень моделируется синусом. Данные ряда $y(m)$ из таблицы 1 сглажены по первой гармонике Фурье, и (теоретический) уровень электропотребления (кВт·ч) в этом доме смоделирован по месяцам m следующей формулой:

$$(1) \quad E_{\text{month}}(m) = a_0 + a_1 \cos \frac{(2m-1)\pi}{12} + b_1 \sin \frac{(2m-1)\pi}{12} \approx \\ \approx 801,4 + 128,6 \cos \frac{(2m-1)\pi}{12} - 52,5 \sin \frac{(2m-1)\pi}{12} \quad (1 \leq m \leq 12)$$

Таблица 2 – Проверка распределения на нормальность

| | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Месяц m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Наблюдаемое электропотребление $y(m)$ (кВт·ч) | 1001 | 787 | 826 | 646 | 675 | 650 |
| Теоретическое электропотребление $E_{\text{month}}(m)$ | 912,0 | 855,2 | 784,0 | 717,4 | 673,3 | 663,6 |

| | | | | | | |
|--|------------------|-------------------|-------|-------|----------------------|----------------------|
| $y(m) - E_{\text{month}}(m)$ | 89,0 | -68,2 | 42,0 | -71,4 | 1,7 | -13,6 |
| Ранжированный вариационный ряд | -172,5 | -72,4 | -71,4 | -68,2 | -13,6 | 1,7 |
| Наблюдаемые квантили | -172,5 | -70,7 | | | 0,4 | |
| Ожидаемые вероятности | 1/13 = 0,0769 | 4/13 = 0,3077 | | | 7/13 = 0,5385 | |
| Ожидаемые нормальные квантили z_k | -1,426 | -0,502 | | | 0,097 | |
| Продолжение таблицы 2: | | | | | | |
| Месяц t | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Наблюдаемое электропотреблен ие $y(m)$ (кВт·ч) | 704 | 807 | 876 | 813 | 757 | 1075 |
| Теоретическое электропотреблен ие $E_{\text{month}}(m)$ | 690,8 | 747,6 | 818,8 | 885,4 | 929,5 | 939,2 |
| $y(m) - E_{\text{month}}(m)$ | 13,2 | 59,4 | 57,2 | -72,4 | -172, 5 | 135,8 |
| Ранжированный вариационный ряд | 13,2 | 42,0 | 57,2 | 59,4 | 89,0 | 135,8 |
| Наблюдаемые квантили | 0,4 | 52,9 | | | 89,0 | 135,8 |
| Ожидаемые вероятности | 7/13 = 0,5385 | 10/13 = 0,7692 | | | 11/13 = 0,8462 | 12/13 = 0,9231 |
| Ожидаемые | | | | | | |

| | | | | |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| нормальные квантили z_k | 0,097 | 0,736 | 1,020 | 1,426 |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|

В формуле (1) величина 801,4 равна среднему значению $\bar{E}_{\text{month}} = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} y(m)$, а выражение под синусом и косинусом равно радианному номеру месяца m (см. таблицу 1). Предлагаемый способ радианной нумерации месяцев даёт более адекватный результат благодаря сдвигу на $\frac{\pi}{12}$ по сравнению с традиционной радианной нумерацией месяцев [10], в которой радианный номер месяца m берется равным $\frac{2m\pi}{12}$. Коэффициенты a_0, a_1, b_1 гармоники (1) рассчитаны методом наименьших квадратов. Модель (1) взята в настоящей работе как теоретический уровень в месячных колебаниях электропотребления в доме.

Цель нижеследующего – обосновать вышеупомянутое предположение о том, что при каждом фиксированном значении t случайные показания счётчика потреблённой электроэнергии $y(t)$ в момент времени t распределены по закону, близкому к нормальному закону с математическим ожиданием $E(t)$ и постоянным стандартным отклонением σ , где $E(t)$ – функция моделирующая уровень энергопотребления в зависимости от времени t .

Рассмотрим модель энергопотребления по месяцам – $E(t) = E_{\text{month}}(m)$, определяемую формулой (1). Надо показать, что отклонения $y(m) - E_{\text{month}}(m)$ можно считать распределёнными по нормальному закону. Поскольку число наблюдений невелико (всего 12 записей мониторинга электропотребления в таблице 1), традиционный критерий согласия Пирсона неприменим, и надо использовать другие методы, например, *квантиль-квантильный график* («*Q-Q plot*»). Этот метод описан в [3; 9, с. 30] и основан на наблюдаемых квантилях vs. ожидаемых квантилях.

В ранжированном вариационном ряде близкие по значению варианты группируются в одну группу со значением равным среднему

арифметическому этих близких значений. (См. таблицу 2.) В результате получается *сгруппированный ранжированный вариационный ряд*, варианты которого соответствуют наблюдаемым квантилям. Значения ожидаемой функции распределения $F_{12}(y(m) - E_{\text{month}}(m))$ (см. *ожидаемые вероятности* в таблице 2) вычисляются стандартным образом [3]. По этим значениям находятся ожидаемые (нормированные) нормальные квантили z_k при помощи online калькулятора Normal Distribution Calculator (<http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx>). (Обратная задача нахождения значений функции распределения по квантилям также решена алгоритмически [5].)

Наконец, на плоскости отмечаются точки с абсциссами, равными наблюдаемым квантилям (т.е. значениям вариант сгруппированного ранжированного вариационного ряда), и ординатами, равными соответствующим ожидаемым нормальным квантилям z_k (таблица 2). На рисунке 1 все ординаты умножены на 100, а также построена линейная регрессия для удобства восприятия построенного квантиль-квантильного графика. Поскольку все шесть отмеченных точек приблизительно лежат на одной прямой, отклонения $y(m) - E_{\text{month}}(m)$ считаются распределёнными по закону, близкому к нормальному.

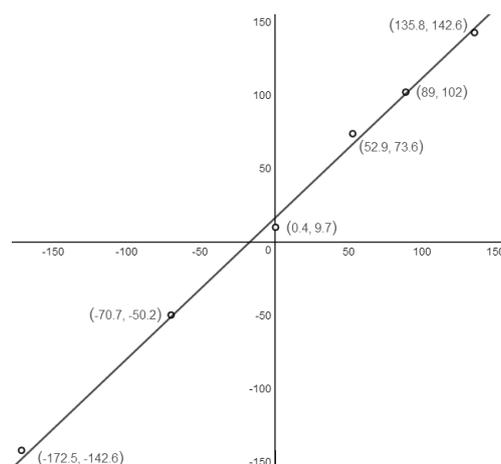


Рис. 1 – Квантиль-квантильный график и регрессионная прямая

Автор выражает благодарность профессорам Людмиле Владимировне Згонник и Лидии Ивановне Коверниковой за ценные комментарии по работе, в том числе по его докладу на международной конференции ICPQM-2016 в Московском энергетическом институте 24 ноября 2016 г. (<http://icpqm.org/pqm-2016/>).

Литература

1. Згонник Л.В. Антикризисное управление: учебник. М.: ООО ИТК Дашков и К°, 2010. 207 с.
2. Згонник Л.В. Антикризисное управление: учебник. М.: ООО ИТК Дашков и К°, 2014. 208 с.
3. Иванников Д.А., Фомичев Е.Н. Основы метрологии и организации метрологического контроля: учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2001. URL: http://www.nntu.ru/RUS/fakyl/VECH/metod/metrology/4_7.htm (дата обращения: 10.04.2017).
4. Лавренченко С.А., Гладская И.Г., Згонник Л.В., Сумзина Л.В. Умный энергометр // Управление качеством электрической энергии: Международная научно-практическая конференция (Москва, 23–25 ноября 2016 г.): Материалы. С. 177–184. – М.: ООО «Центр полиграфических услуг Радуга», 2017. – 300 с.
5. Лавренченко С.А., Згонник Л.В., Гладская И.Г. Статистические подходы к управлению показателями качества услуг // Сервис plus. 2016. Т. 10. № 4. С. 35–44. DOI: 10.22412/1993-7768-10-4-4. URL: <https://t.co/Usc2RqhPWD> (дата обращения: 10.04.2017).
6. Лавренченко С.А., Згонник Л.В., Гладская И.Г., Лао Ш.С., Соломянная М.Е. Статистические подходы к управлению показателями качества сервиса / Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: Материалы Международной научно-практической конференции, Сочи, 22–31 мая 2016 г. / Соч. гос. ун-т: Материалы. С. 21–23 / Науч. ред.: Ю.И. Дрейзис, И.Л. Макарова, А.Р. Симонян Е.И. Улитина. — Сочи: Типография ИП Кривлякин С.П., 2016. — 71 с.

7. Лавренченко С.А., Згонник Л.В., Гладская И.Г., Политикова Н.А. Математические модели мониторинга и контроля электропотребления с учётом фактора сезонности // Сервис в России и за рубежом. 2017. Т. 11. № 5 (75). С. 133-140. DOI: 10.22412/1995-042X-11-5-12. URL:

<https://yadi.sk/i/jXJEzw483LfCeN> (дата обращения: 26.08.2017).

8. Лавренченко С.А., Лао Ш.С., Орехова Н.А., Соломянная М.Е. Методология управленческого цикла мер по энергосбережению / Региональные особенности реализации государственной политики. Сборник научных статей преподавателей и студентов Института туризма и сервиса РГУТИС в г. Люберцы / Ред.- сост.: Горшкова Л.В. – М.: Издательство «Перо», 2017. – 88с.

9. Thode Н.С. Testing for normality. New York: Marcel Dekker, 2002. ISBN 0-8247-9613-6.

10. Шмойлова Р. А., Минашкин В. Г., Садовникова Н. А. Практикум по теории статистики. 2 изд. М.: Финансы и статистика, 2004.

УДК 519.1+004.9

Компьютерное построение интервальной раскраски двудольных графов

А.М.Магомедов¹, Т.А. Магомедов²

Махачкала, Дагестанский государственный университет¹

Амстердам, программист фирмы Uber²

Работа выполнена при поддержке Отдела математики и информатики ДНЦ РАН.

Задача о расписании беспростойного обслуживания множества заданий $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ в системе специализированных процессоров $Y = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$ сводится к задаче о (реберной) интервальной раскраске двудольного графа $G = (X, Y, E)$, где $(x_i, y_j) \in E$, если и только если процессору y_j предписано выполнить над заданием x_i операцию единичной длительности. Известно [1], что задача NP-полна. С применением компьютерных ресурсов в [2] показано, что все двудольные графы порядка не более 14 интервально раскрашиваемы. Примеры двудольных графов порядка

более 18, не раскрашиваемых интервально, широко известны; вопрос интервальной раскрашиваемости двудольных графов порядка 15, 16, 17 и 18 остается открытым [3].

На основе модификации жадного алгоритма проверки интервальной раскрашиваемости, приведенного в [4]-[5], и алгоритма выделения в множестве S всех двудольных графов заданного порядка подмножества существенно меньшей мощности, содержащего для каждого графа $G \in S$ граф, изоморфный G [6], разработана технология проверки интервальной раскрашиваемости двудольных графов заданного порядка. С применением разработанного на ее основе авторского программного обеспечения доказано, в частности, что все двудольные графы порядка 15 обладают интервальной раскраской. Следующие примеры дают представление об эффективности авторского программного обеспечения: на проверку интервальной раскраски всех двудольных графов $G=(X,Y,E)$ при $|X|=4$, $|Y|=12$, потребовалось времени – 7сек; при $|X|=5$, $|Y|=11$, – 1993сек; при $|X|=6$, $|Y|=10$, – 95178 сек. (выяснено, что во всех перечисленных случаях интервальная раскраска двудольных графов порядка 16 существует). Характеристики использованного авторами компьютерного обеспечения: Surface, Windows 10 Pro, Processor: Intel(R) Core(TM) i5-4300UCPU © 1.90GHz 2.50 GHz, RAM: 8.00 GB, Systemtype: 64-bitOperatingSystem, x64-based.

Литература

1. Севастьянов С.В. Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискретного анализа, т. 50, 1990. – С. 61-72.
2. Giaro K., Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting period (in Polish) // PhD thesis, Technical University of Gdansk, IETI Faculty, Gdansk. – 1999.
3. Petrosyan P.A., Khachatryan H.H., Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, Journal of Graph Theory 76, Issue 3, 2014. – P. 200-216.
4. Магомедов А.М. Цепочечные структуры в задачах о расписаниях // Прикладная дискретная математика. 2016, №3 (33). – С. 67-77.

5. Магомедов А.М. Генерация графов и их раскраска методом жадного алгоритма // Свидетельство № 2017611516 о государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 06.02.2017.

6. Магомедов А.М. Элиминация перебора двудольных графов на 15 вершинах // ДЭМИ, Дагестанский научный центр РАН, 2016, №5. – с. 20-24.

УДК 519.1+004.9

Сокращенное перечисление двудольных графов заданного порядка

А.М. Магомедов, Т.А. Магомедов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

magomedtagir1@yandex.ru

Построен жадный алгоритм для проверки существования интервальной раскраски и построения ее в случае существования. Разработана методика, позволяющая для множества S всех двудольных графов заданного порядка H построить множество S_0 двудольных графов существенно меньшей мощности, содержащее для каждого графа G из S граф, изоморфный G . Применением жадного алгоритма к каждому графу из S_0 с помощью программного обеспечения показано, что при малых значениях H все графы из S_0 интервально раскрашиваемы.

Built greedy algorithm for testing the existence of interval coloring and build it in the case of existence. Developed a technique that allows for the set S of all bipartite graphs of given order H to construct a bipartite graph S_0 lot significantly less capacity that contains, for each graph G of S is a graph isomorphic to G . applying the greedy algorithm to each row of S_0 using the software it is shown that for small values of H from all graphs S_0 interval coloring.

Ключевые слова: двудольный граф, интервальная раскраска, программа.

Key words: bipartite graph, interval coloring, program.

1. Задачи теории расписаний и раскраска графов

1.1 Введение. Работа выполнена при поддержке Дагестанского государственного университета и отдела математики и информатики ДНЦ РАН.

Исследования в области теории расписаний приводят к появлению новых методов и даже целых направлений в теории графов. Например, знаменитая проблема четырех красок возникла в связи с задачами теории расписаний и разбиений [1, с.110]. В свою очередь, с проблемой четырех красок связана задача о правильной вершинной раскраске графа в три цвета, т.е. задача о существовании такого отображения множества вершин графа в множество цветов $\{1, 2, 3\}$, что концевым вершинам каждого ребра сопоставляются разные цвета. В [2] доказано, что задача раскраски графа в три цвета NP -полна, следовательно, не может быть разрешима за полиномиальное время, если верна знаменитая гипотеза « $NP \neq P$ » (отметим недавнее сообщение Норберта Блюма о доказательстве данной гипотезы [3]).

Некоторые задачи теории расписаний представляется естественным формулировать в терминах *реберной* раскраски. Раскраску множества ребер E будем называть правильной реберной раскраской графа $G = (V, E)$, если в каждой вершине все *представленные в ней цвета* (цвета всех инцидентных ребер) различны. Следуя работе [4], *интервальной t -раскраской* графа $G = (V, E)$ будем называть правильную раскраску ребер G в цвета $1, 2, \dots, t$, при которой в каждый цвет окрашено хотя бы одно ребро, а для каждой вершины $v \in V$ ребра, инцидентные v , окрашены в $d(v)$ последовательных цветов. Всюду в дальнейшем рассматриваются только реберные раскраски. Если при каком-либо t граф имеет интервальную t -раскраску, будем говорить, что граф *интервально раскрашиваем*. В [4] доказано, что задача об интервальной раскрашиваемости NP -полна.

Пусть планируется обработать множество заданий $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ в системе специализированных процессоров $Y = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$; для каждого задания x_i определен набор процессоров, каждый из которых должен выполнить одну операцию по обработке x_i ; длительность операции равна единице, запрещено одновременное участие объекта (задания, процессора) в двух и более операциях, условия предшествования отсутствуют. Требуется

выяснить, существует ли расписание выполнения обработки без простоев объектов.

Рассмотрим двудольный граф $G = (X, Y, E)$, где $(x_i, y_j) \in E$, если и только если процессору y_j предписано выполнить операцию над заданием x_i . Под расписанием длины t будем понимать отображение множества ребер E в множество $\{1, 2, \dots, t\}$, где каждому ребру $(x_i, y_j) \in E$ сопоставляется $c(x_i, y_j)$ – номер дискретного момента времени, в течение которого y_j выполняет операцию над x_i . Если рассматривать $c(x_i, y_j)$ в качестве цвета ребра (x_i, y_j) , получим эквивалентную задачу интервальной реберной раскраски двудольного графа. Запрет на одновременное участие объекта в двух и более операциях в терминологии теории графов означает, что раскраска должна быть *правильной*, а отсутствие простоев – что раскраска должна быть и *интервальной*, т.е. в каждой вершине графа все представленные в ней цвета должны образовать целочисленный интервал (всюду в дальнейшем под интервалом будем понимать целочисленный интервал, интервал $\{a, a + 1, \dots, b\}$ будем обозначать $[a..b]$). В [5] показано, что задача об интервальной раскрашиваемости заданного двудольного графа *NP*-полна.

1.2 Свойства интервальной раскраски. Естественно ожидать, что двудольные графы с малым порядком интервально раскрашиваемы. Возникает вопрос: «Каково самое сильное ограничение на количество вершин, при котором задача все еще остается *NP*-полной?» С применением компьютерных ресурсов в [6] доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Все двудольные графы с числом вершин не более 14 интервально раскрашиваемы.

В ряде статей (например, в [7]) указывается, что вопрос интервальной раскрашиваемости двудольных графов порядка 15, 16, 17 и 18 остается открытым.

Следствие. Если двудольный граф $G = (X, Y, E)$ с числом вершин 15 несвязен или обладает висячим ребром, то граф G интервально раскрашиваем.

Интересно, что и малая мощность только одной доли способна обеспечить двудольному графу $G = (X, Y, E)$ интервальную раскрашиваемость.

Утверждение 2 [8]. Если для двудольного графа $G = (X, Y, E)$ выполнены неравенства $|X| \leq 3$ или $|Y| \leq 3$, то граф G интервально раскрашиваем.

Утверждение 3. Пусть задана интервальная раскраска связного графа и

$$P = (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$$

– цепь, соединяющая два ребра: $b_0 = (a_0, a_1)$ и $b_{n-1} = (a_{n-1}, a_n)$ с цветами t_0 и t_{n-1} соответственно, $t_0 < t_{n-1}$. Тогда для любого τ , $t_0 < \tau < t_{n-1}$, найдется ребро цвета τ , инцидентное некоторой вершине из P .

Доказательство. Обозначим интервал цветов, представленных в вершине a_i , через $[m_i..M_i]$; $m' = \min_i m_i$, $M' = \max_i M_i$. Т.к. каждые два соседних интервала последовательности

$$[m_0..M_0], [m_1..M_1], \dots, [m_{n-1}..M_{n-1}]$$

имеют непустое пересечение, то каждый цвет из интервала $[m'..M']$ представлен в некоторой вершине цепи P . Поскольку $t_0 \in [m_0..M_0]$, $t_{n-1} \in [m_{n-1}..M_{n-1}]$, то $t_0, t_{n-1} \in [m'..M']$; следовательно, и $\tau \in [m'..M']$, поэтому цвет τ представлен в некоторой вершине цепи P . ■

Из Утверждения 3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 4. Приведенное выше определение интервальной t -раскраски из работы [4] равносильно следующему: «Интервальной t -раскраской связного графа G называется раскраска ребер G в цвета $1, 2, \dots, t$, при которой найдутся ребра, окрашенные в цвета 1 и t , и для каждой вершины v цвета, представленные в v , образуют множество последовательных чисел».

Утверждение 5. [4] Если двудольный граф на k вершинах обладает интервальной t -раскраской, то $t \leq k - 1$.

Двудольный граф $G = (X, Y, E)$, где $|X| = n, |Y| = m$, будем называть (n, m) -графом. Подход, предложенный в следующих разделах, в частности, позволил доказать, что все (n, m) -графы порядка 15 интервально раскрашиваемы.

2. Перечисление нормализованных (n, m) -графов

2.1 Нормализованное представление двудольного графа. Рассмотрим двудольный граф $G = (X, Y, E)$, где $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}, Y = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$.

Подмножество вершин Y , смежных (не смежных) вершине $x_i \in X$, обозначим через Y_i (\bar{Y}_i); $i = 0, \dots, n - 1$. Множество индексов вершин подмножества $Z \subset Y$, образованного последовательными вершинами из множества Y , будем называть *индексным интервалом* множества Z . Введем понятие *нормализованного представления* графа $G = (X, Y, E)$.

1. Автоморфизмом множества Y разместим вершины множества Y_0 в начальных позициях множества Y . Тем самым интервал $[0..n - 1]$ разбивается на индексные интервалы множеств Y_0 и \bar{Y}_0 .

2. Пусть $0 < i < n - 1$ и в результате некоторого автоморфизма α интервал $[0..n - 1]$ разбит на 2^i последовательных интервалов – индексных интервалов некоторых множеств Z_0, \dots, Z_{2^i-1} , некоторые из которых могут быть пустыми. Выполним для каждого Z_j автоморфизм β_j , размещающий все вершины множества $Z_j \cap Y_i$ в начальных позициях множества Z_j , а вершины множества $Z_j \cap \bar{Y}_i$ – соответственно в последних позициях множества Z_j . Суперпозицию $\alpha \cdot \beta_0 \cdot \dots \cdot \beta_{2^i-1}$ снова обозначим через α . Автоморфизм α индуцирует разбиение интервала $[0..n - 1]$ на 2^{i+1} последовательных интервалов – индексных интервалов множеств

$$Z_0 \cap Y_i, Z_0 \cap \bar{Y}_i, \dots, Z_{2^i-1} \cap Y_i, Z_{2^i-1} \cap \bar{Y}_i. \quad (1)$$

Увеличим i на единицу и переобозначим множества (1) через $Z_0, \dots, Z_{2^{i+1}-1}$ последовательно слева-направо.

Пока $i < n - 1$, повторим выполнение пункта 2, по достижении равенства $i = n - 1$ перенумеруем вершины множества X по невозрастанию их степеней:

$$d(x_0) \geq d(x_1) \geq \dots d(x_{n-1}) \quad (2)$$

и полученный граф назовем *нормализованным графом* или – если необходимо подчеркнуть связь с графом $G = (X, Y, E)$ – *нормализованным представлением графа $G = (X, Y, E)$* .

2.2 Схема перечисления нормализованных (n, m) -графов. Очевидно, граф $G = (X, Y, E)$ изоморфен своему нормализованному представлению. Поэтому достаточно проверить интервальную раскрашиваемость всех нормализованных (n, m) -графов. Несмотря на то, что среди них могут встретиться изоморфные графы, компьютерный перебор всех нормализованных (n, m) -графов потребует при $n + m = 15$ «значительно меньше» времени, нежели перебор всех (n, m) -графов. Существенному сокращению времени перебора призвано способствовать и то обстоятельство, что мы ограничимся связными графами без висячих вершин (см. следствие Утверждения 1) и случаем $3 < n \leq 7$ (см. Утверждение 2).

Замечание 1. Напомним, что задача об изоморфизме графов была сформулирована [9] в 1972 г. как «открытая» задача, относительно которой неизвестно, является ли она NP -полной.

При реализации алгоритма в многократных внутренних итерациях очередного вложенного цикла по $i = 0, \dots, n - 1$ используются целочисленные переменные a_{ij} , которые пробегает значения из соответствующих индексных интервалов (на рис. 1 – наименьшие по длине интервалы, охватывающие a_{ij}), формируются суммы

$$d(x_i) = a_{i0} + a_{i1} + \dots + a_{i,2^{i-1}}$$

и, если неравенство (2) выполнено, то $d(x_i)$ вершин множества Y с соответствующими индексными интервалами длины a_{ij} выбираются в качестве вершин, смежных вершине x_i ($i = 0, \dots, n - 1$).

Схема перечисления всех нормализованных (n, m) -графов представлена на рис. 1. Продемонстрируем на примерах использование этой схемы.

Пример 1. Генерация списков смежности для вершины x_3 .

$d(x_3) = a_{30} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} + a_{36} + a_{37}$. В список вершин, смежных x_3 , выбираются по a_{3j} вершин множества Y , индексы которых – суть a_{3j} значений из начала интервала Z_{3j} , $j = 0, \dots, 7$, где:

$$\begin{aligned} Z_{30} &= [0..a_{20} - 1], Z_{31} = [a_{20}..a_{10} - 1], Z_{32} = [a_{10}..a_{10} + a_{21} - 1], \\ Z_{33} &= [a_{10} + a_{21}..a_0 - 1], Z_{34} = [a_0..a_0 + a_{22} - 1], \\ Z_{35} &= [a_0 + a_{22}..a_0 + a_{11} - 1], Z_{36} = [a_0 + a_{11}..a_0 + a_{11} + a_{23} - 1], \\ Z_{37} &= [a_0 + a_{11} + a_{23}, \dots, m - 1]. \end{aligned}$$

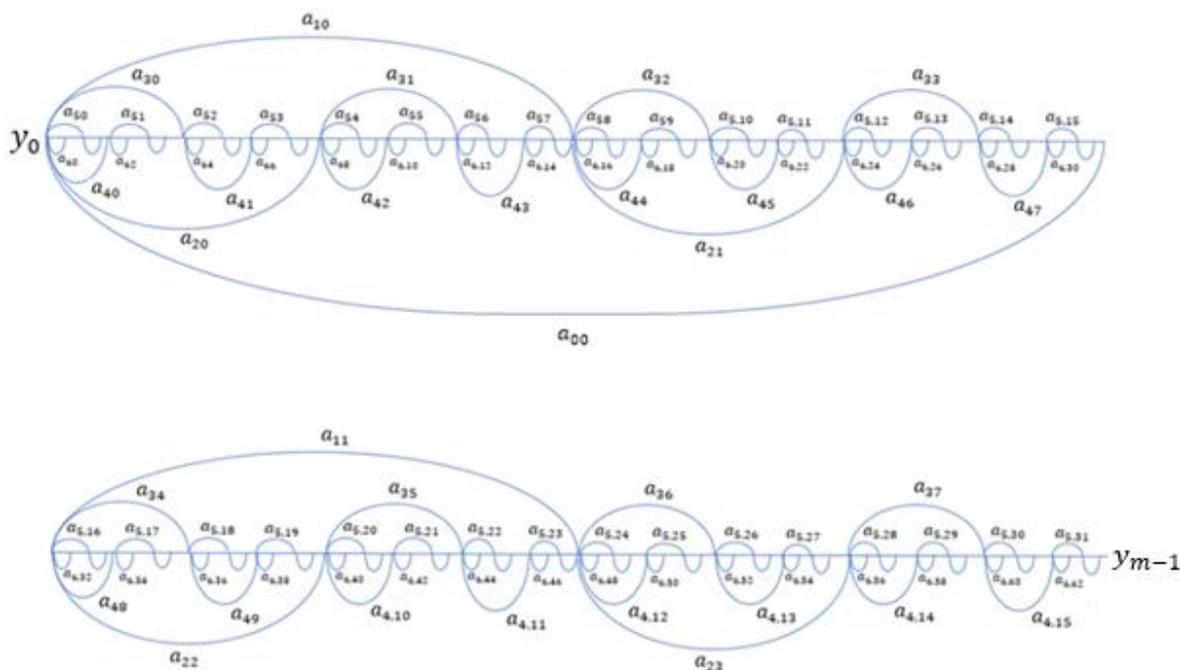


Рис. 1. Схема генерации всех нормализованных (n, m) -графов, $n \leq 7$; нижняя часть рисунка является непосредственным продолжением верхней части. При $n < 7$ рисунок корректируется путем удаления всех интервалов, обозначенных a_{ij} , $i > n - 1$.

Пример 2. Генерация списков смежности для вершины x_4 .

$d(x_4) = a_{40} + a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} + a_{45} + a_{46} + a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{4,10} + a_{4,11} + a_{4,12} + a_{4,13} + a_{4,14} + a_{4,5}$. В список смежных x_4 вершин будем выбирать по a_{4j} вершин множества Y с индексами из начала интервала Z_{4j} , $j = 0, \dots, 15$, где:

$$Z_{40} = [0..a_{30} - 1], \quad Z_{41} = [a_{30}..a_{20} - 1], \quad Z_{42} = [a_{20}..a_{20} + a_{31} - 1],$$

$$Z_{43} = [a_{20} + a_{31}..a_{10} - 1], \quad Z_{44} = [a_{10}..a_{10} + a_{32} - 1],$$

$$Z_{45} = [a_{10} + a_{32}..a_{10} + a_{21} - 1], \quad Z_{46} = [a_{10} + a_{21}..a_{10} + a_{21} + a_{33} - 1],$$

$$Z_{47} = [a_{10} + a_{21} + a_{33}..a_0 - 1], \quad Z_{48} = [a_0..a_0 + a_{34} - 1],$$

$$Z_{49} = [a_0 + a_{34}..a_0 + a_{22} - 1], \quad Z_{10} = [a_0 + a_{22}..a_0 + a_{22} + a_{35} - 1],$$

$$Z_{4,11} = [a_0 + a_{22} + a_{35}..a_0 + a_{11} - 1], \quad Z_{4,12} = [a_0 + a_{11}..a_0 + a_{11} + a_{36} - 1],$$

$$Z_{4,13} = [a_0 + a_{11} + a_{36}..a_0 + a_{11} + a_{23} - 1],$$

$$Z_{4,14} = [a_0 + a_{11} + a_{23}..a_0 + a_{11} + a_{23} + a_{37} - 1],$$

$$Z_{4,15} = [a_0 + a_{11} + a_{23} + a_{37}..m - 1].$$

Справедливость следующего утверждения очевидна.

Утверждение 6. Пусть S – множество всех связных (n, m) -графов без висячих вершин, S_0 – множество всех нормализованных (n, m) -графов. Для каждого графа G из S в множестве S_0 найдется граф, изоморфный графу G .

3. Жадный алгоритм интервальной раскраски

3.1 Кусочно-непрерывный путь в связном графе. В разделе 3.2 изложена модификация жадного алгоритма проверки интервальной раскрашиваемости, приведенного в [10]. В формулировке алгоритма используется понятие *кусочно-непрерывного пути* в графе G . Приведем логическую (с результатом *True* или *False*) процедуру генерации кусочно-непрерывного пути.

Пусть в графе G выбрана произвольная непродолжимая цепь P и логической переменной *Result* присвоено значение *True*.

Пока не все ребра графа G включены в P , выполним следующие три действия: 1) если среди вершин цепи P найдется вершина с инцидентным ребром, не включенным в P , то последнюю из таких вершин обозначим a_k и

перейдем к второму действию, в противном случае присвоим переменной *Result* значение *False* и «досрочно» завершим цикл; 2) построим непродолжимую цепь P_1 , начинающуюся с вершины a_k и содержащую лишь ребра, не включенные в P ; 3) результат конкатенации P и P_1 обозначим снова через P .

Если по завершении цикла значение переменной *Result* равно *True*, то последовательность ребер графа G , перечисленных в том порядке, в каком они следуют в итоговом P , будем называть кусочно-непрерывным путем в графе G , в противном случае заключаем, что граф G не является связным и кусочно-непрерывный путь не существует.

3.2 Жадный алгоритм интервальной раскраски. Напомним, что требуется проверить, существует ли интервальная раскраска заданного связного (n, m) -графа $G = (X, Y, E)$ не более чем t цветами (и выполнить раскраску в случае существования).

Количество вершин и ребер графа G обозначим через H и h соответственно ($H = n + m$). В соответствии с Утверждением 5, положим t равным $H - 1$ (это единственный пункт алгоритма, учитывающий двудольную природу графа G). Используемые далее обозначения, присущие языкам программирования, понятны без дополнительных объяснений. Например, $i++$ ($i--$) означает увеличение (уменьшение) значения переменной i на единицу, скобки $\{\}$ используются для обозначения блока (группового оператора).

Построим кусочно-непрерывный путь $P = \{e_0, \dots, e_{h-1}\}$ и будем последовательно окрашивать ориентированные ребра $e_i = (v_i, w_i)$ цветами из целочисленного интервала $[1..t]$ так, что в любой момент времени в каждой вершине v представленные в v цвета образуют некоторый список L_v , составленный из последовательных целых чисел. Алгоритм раскраски, обладающий таким свойством, будем называть *жадным алгоритмом*. Массив текущих списков цветов, представленных в вершинах множества V , будем обозначать через L , $L = \{L_{v_0}, \dots, L_{v_{H-1}}\}$. *Приграничным цветом* для пустого интервала назовем любой цвет из интервала $[1..t]$, для непустого интервала

$[a..b]$ нижним приграничным цветом назовем цвет $a - 1$, если $1 \leq a - 1 \leq t$, верхним приграничным цветом – цвет $b + 1$, если $1 \leq b + 1 \leq t$; в случае существования, нижний и верхний приграничные цвета для списка L_{v_i} будем обозначать через $low(v_i)$ и $high(v_i)$ соответственно.

Рассмотрим ситуацию, когда ребра e_0, \dots, e_{i-1} уже окрашены и требуется окрасить ребро e_i , $i > 0$. Список цветов в начальной вершине v_i ориентированного ребра $e_i = (v_i, w_i)$ не пуст, так как содержит цвет ребра e_{i-1} . Очевидно, что окраска ребра e_i без изменений цветов ранее окрашенных i ребер возможна только в следующих двух случаях: 1) $low(v_i)$ существует и является приграничным цветом для w_i ; 2) $high(v_i)$ существует и является приграничным цветом для w_i . Соответственно допустимы две попытки окрасить ребро e_i без изменений цветов ранее окрашенных ребер; номера 1 или 2 предпринятых попыток будем сохранять в ячейке q_i (удобно использовать и третье значение $q_i = 0$ в качестве признака, что ни одна из двух попыток пока не предпринята). Заметим, что элементы массива q индексируются, начиная с единицы, в отличие от всех других массивов, используемых в нашем алгоритме.

Для записи и хранения цвета ребра e_i будем использовать ячейку C_i . В качестве признака успешного (с построением интервальной раскраски) или неудачного (без построения интервальной раскраски) завершения жадного алгоритма используется логическая переменная *Success*.

Перейдем к изложению жадного алгоритма, который осуществляет перебор с возвратами и, кроме стадии инициализации, включает итерации с двумя пунктами: «Прямой шаг» и «Возвратный шаг».

1. Инициализация

Success := *false*; всем v_i (соответственно w_i) присвоить номера начальных (конечных) вершин ориентированных ребер e_i из кусочно-непрерывного пути P , $i = 0, \dots, h - 1$; для всех вершин выбрать пустые списки цветов: $L_{v_0} := \emptyset$; ...; $L_{v_{h-1}} := \emptyset$; всем элементам массивов q и C присвоить нулевые значения: $q_1 := 0$; ...; $q_{h-1} := 0$; $C_0 := 0$; ...; $C_{h-1} := 0$; начальное ребро e_0 окрасить в

цвет 1: $C_0 := 1$; $L_{v_0} := \{1\}$; $L_{w_0} = \{1\}$; номер очередного окрашиваемого ребра выбрать равным единице: $i := 1$.

2. Прямой шаг

FWRD: данный пункт выполняется сразу после инициализации или же после возвратного шага и заключается в окрашивании (более точно, в попытке окрашивания) ребра, номер которого записан в ячейке i .

2.1 Рассмотрим сначала случай $i = 0$:

если $C_0 < t$, то $\{C_0++$; добавить C_0 в списки L_{v_i} и L_{w_i} ; $i++$; перейти к метке FWRD}

иначе $\{Success := false$; завершить алгоритм}.

Заметим, что при первом выполнении прямого шага сразу после инициализации значение i равно единице, однако переход к прямому шагу после возвратных шагов может быть осуществлен и при $i = 0$.

2.2 Рассмотрим случай $i > 0$.

Увеличить на единицу текущий номер попытки раскрасить ребро e_i : q_i++ .

В зависимости от равенств: $q_i=1$ или $q_i=2$ перейти к пунктам 2.2.1 или 2.2.2 соответственно.

2.2.1 Данный пункт выполняется при $q_i = 1$.

Если $low(v_i)$ для начальной вершины v_i рассматриваемого ребра e_i существует и является приграничным цветом для конечной вершины w_i этого ребра,

то

{

$C_i := low(v_i)$; добавить $low(v_i)$ в списки L_{v_i} и L_{w_i} ;

если $i < h - 1$, то $\{i++$; перейти к метке FWRD},

иначе $\{Success := true$; завершить алгоритм}

}

иначе $\{q_i := 2$; перейти к следующему пункту 2.2.2}.

2.2.2 Данный пункт выполняется при $q_i = 2$.

Если $high(v_i)$ для начальной вершины v_i рассматриваемого ребра e_i существует и является приграничным цветом для конечной вершины w_i этого ребра,

то

{

$C_i := high(v_i)$; добавить $high(v_i)$ в списки L_{v_i} и L_{w_i} ;

если $i < h - 1$, **то** $\{i++$; перейти к метке FWRD $\}$,

иначе $\{Success := true$; завершить алгоритм $\}$

}

иначе перейти к метке BASK.

2.3 Обратный шаг

BASK: данный пункт выполняется, если в прямом шаге не удалось окрасить ребро e_i , $0 < i$, $q_i = 2$.

Пока $(i > 0)$ и $(q_i = 2)$

{

$q_i := 0$; $i--$; удалить C_i из списков L_{v_i} и L_{w_i} ;

если $i = 0$, **то** перейти к метке FWRD;

если $q_i < 2$, **то** перейти к метке FWRD;

}

Конец алгоритма.

Замечание 2. Жадный алгоритм «привязан» к выбранному кусочно-непрерывному пути и не выполняет полный перебор попыток интервальной раскраски.

4. Результаты вычислений

4.1 Вычислительная схема. В авторском программном обеспечении, разработанном на языке C# на основе алгоритмов, изложенных в разделах 2 и 3, принята следующая схема.

Для каждого $n = 4, 5, 6, 7$ генерируются все нормализованные $(n, 15 - n)$ -графы, при этом непосредственно после генерации очередного графа G (и

увеличения счетчика N) выполняется следующая процедура: если в графе G существует кусочно-непрерывный путь (связность графа G) и степени всех вершин графа G больше единицы (отсутствие висячих ребер), то с помощью жадного алгоритма проверяется существование интервальной раскраски графа G .

Как видно из схемы, в N подсчитывается не количество нормализованных $(n, 15 - n)$ -графов, а число сгенерированных $(n, 15 - n)$ -графов еще до выполнения проверки связности (совмещенной с проверкой существования кусочно-непрерывного пути) и наличия висячих ребер. Такие графы будем называть *пред-нормализованными*.

Во всех случаях результаты проверки интервальной раскрашиваемости нормализованных $(n, 15 - n)$ -графов оказались положительными, что с учетом Утверждения 6 приводит к следующему выводу: все двудольные графы порядка 15 интервально раскрашиваемы.

4.2 Информация о длительности вычислений. Понятно, что в режиме вытесняющей мультизадачности длительность вычислений носит условный характер и стремление к чрезмерной точности вычислений здесь неуместно. Тем не менее, мы нашли допустимым записать в последней колонке таблицы 1 длительности вычислений, измеренные в одном из экспериментов (временные параметры в других экспериментах несколько отличались от приведенных в таблице). Вычисления для $(n, 15 - n)$ -графов проводились отдельно для $n = 4, 5, 6$ и 7 ; при этом для $n = 7$ рассматривались семь случаев в зависимости от степени вершины x_6 . Значение N в предпоследней колонке таблицы – количество пред-нормализованных графов; количество нормализованных графов (для которых только и запускается жадный алгоритм), соответствующих тому или иному конкретному случаю, существенно меньше.

Табл. 1. Информация о длительности вычислений для пред-нормализованных $(n, 15 - n)$ -графов порядка 15.

| n | $d(x_6)$ | N | Время в сек. |
|-----|----------|------------|--------------|
| 4 | | 366956 | 3,4 |
| 5 | | 35135708 | 441,2 |
| 6 | | 984643930 | 29275,4 |
| 7 | 2 | 1368967576 | 47399,0 |
| 7 | 3 | 1175207229 | 24086,1 |
| 7 | 4 | 341971501 | 15350,6 |
| 7 | 5 | 23364103 | 1547,1 |
| 7 | 6 | 274842 | 10,7 |
| 7 | 7 | 685 | 0,035 |
| 7 | 8 | 1 | 0,003 |

Заключение

Предложенный в разделах 2 и 3 подход не только позволяет доказать, что все $(n, 15 - n)$ -графы интервально раскрашиваемы, но открывает перспективы и для проверки интервальной раскрашиваемости двудольных графов бóльшего порядка. Например, вычислительные эксперименты для $(n, 16 - n)$ -графов показали, что в случаях $n = 4, 5$ и 6 все пред-нормализованные $(n, 16 - n)$ -графы интервально раскрашиваемы, значения N и длительности вычислений равны соответственно: при $n = 4$: 767910 графов, 7,3 сек; при $n = 5$: 126091168 графов, 1993,0 сек; при $n = 6$: 6536939854 графов, 95178,2 сек.

Характеристики использованного авторами компьютерного обеспечения: Surface, Windows 10 Pro, Processor: Intel(R) Core(TM) i5-4300U CPU © 1.90GHz 2.50 GHz, RAM: 8.00 GB, System type: 64-bit Operating System, x64-based.

Авторское программное обеспечение обладает некоторыми дополнительными функциями, неприципиальными для целей данного сообщения. Среди них: различные формы представления графов и кусочно-непрерывных путей, графический и текстовый вывод интервальной раскраски выбранного пользователем графа, в частности – пред-нормализованного.

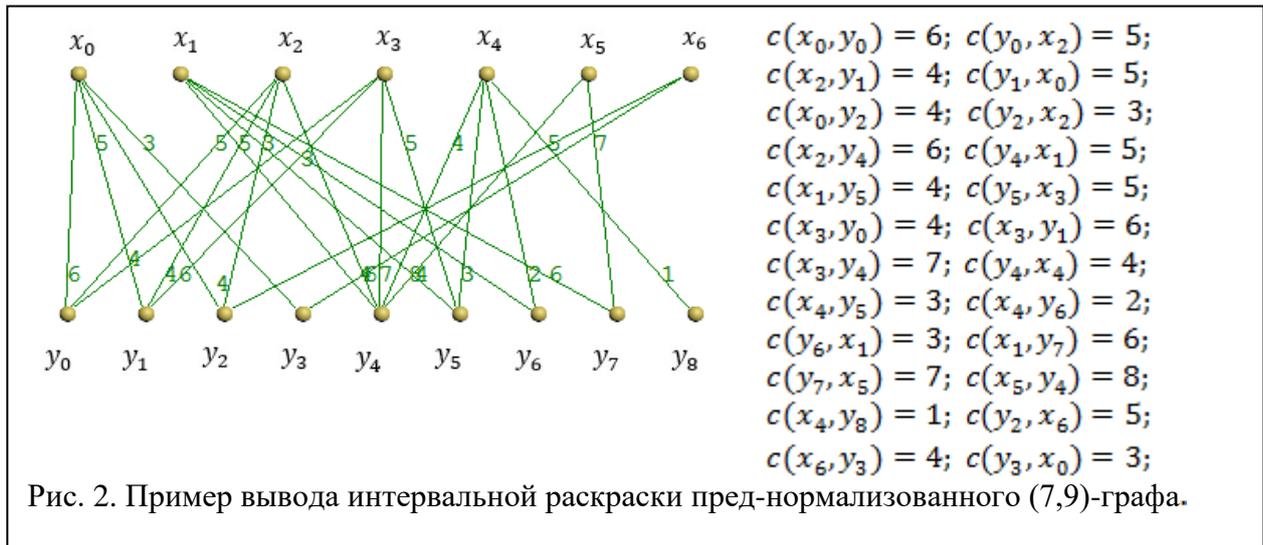


Рис. 2. Пример вывода интервальной раскраски пред-нормализованного (7,9)-графа.

Пример такого вывода приведен на рис. 2.

Литература

1. Гэрри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Stockmeyer, L. J. Planar 3-colorability is NP-complete // SIGACT News. 1973. 5:3. – P. 19-25.
3. Norbert Blum, A Solution of the P versus NP Problem // Institut für Informatik, Universität Bonn / arXiv:1708.03486v1 [cs.CC] 11 Aug 2017.
4. Асратян А. С., Камалян Р. Р. Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика, вып. 5. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1987. С. 25-34.

5. Севастьянов С.В. Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискретного анализа, т. 50, 1990. – С. 61-72.
6. Giaro K., Compact task scheduling on dedicated processors with no waiting period (in Polish) // PhD thesis, Technical University of Gdansk, IETI Faculty, Gdansk. – 1999.
7. Petrosyan P.A., Khachatryan H.H., Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, Journal of Graph Theory 76, Issue 3, 2014. – P. 200-216.
8. Giaro K., Kubale M. and Malafiejski M., On the deficiency of bipartite graphs, Discrete Appl. Math. 94 (1999). – P. 193-203.
9. Karp R. M., Reducibility among combinatorial problems // in R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 1972. – P. 85-103.
10. Магомедов А.М. Цепочечные структуры в задачах о расписаниях // Прикладная дискретная математика. 2016, №3 (33). – С. 67-77.

УДК 336.77+519.1

Сжатое представление связей между кредитными учреждениями

Р.М. Магомедова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

1. Введение

В сообщении рассматривается задача разработки экономного представления связей между обществами взаимного кредита (т.е. «кредитными учреждениями, осуществляющими кредитование промышленных, торговых и других компаний на взаимных началах» [1]).

Мы предложим новый формат сжатого представления связей между учреждениями.

2. Сжатый формат информации о связях кредитных учреждений

Представим кредитные учреждения в виде узлов неориентированного графа $G = (V, E)$; если учреждения v_i и v_j связаны взаимными финансовыми операциями, то $(v_i, v_j) \in E$.

Для текстового файла с информацией о неориентированном графе $G = (V, E)$, где $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ – множество из n узлов, E – множество ребер, предлагается следующая структура: в i -й строке файла с n строками ($i=0, 1, \dots, n-1$) располагается список тех узлов, смежных узлу v_i , номера которых больше i ; если номера всех узлов, смежных узлу v_i , меньше i , то i -я строка содержит единственный символ “-”.

Пример. Текстовому файлу с содержимым

```
1, 2, 3, 4
2,4
-
5
5
-
```

соответствует неориентированный граф из шести вершин, где списки связности вершин 0, 1, 2, 3, 4 и 5 равны соответственно (1,2,3,4), (0,2,4), (), (0,5), (0,1,5) и (3,4).

Очевидно, что последняя строка файла всегда содержит знак минуса. Вместо того, чтобы сократить эту строку файла, мы используем специальный знак («-« или «+») для распространения формата представления связей на случай ориентированного графа. Теперь включение дуги $(v_i, v_j) \in E$ означает, что учреждение v_i кредитует учреждение v_j , а не просто наличие финансовых операций между этими учреждениями (как раньше). Но как по исходному текстовому файлу определить, какому виду связей он соответствует? Замену в последней строке файла знака «-« на знак «+» будем рассматривать как признак ориентированного графа; если i -я строка состоит из знака «-«, это означает, что номера всех учреждений, связанных с учреждением i , меньше i ; элементами каждой i -й строки, отличной от «-« и «+», могут быть как положительные, так и отрицательные числа j , $|j| > i$: $j > 0$ – признак дуги (i, j) , $j < 0$ – признак дуги (j, i) .

Пример. Текстовый файл с содержимым

1, 2, -3

2

3

+

имеет следующий смысл: учреждения 0, 1, 2 и 3 кредитуют соответственно учреждения (1,2), (2), (3) и (0).

3. Заключение

При описанном способе задания связей графа $G = (V, E)$, соответствующего n кредитным учреждениям v_0, \dots, v_{n-1} , объем требуемой памяти «приблизительно» равен $|E|$, тогда как известные из литературных источников способы (см., например, [2, с. 203]) потребуют в случае неориентированных графов «приблизительно» $2|E|$ памяти.

Список литературы

1. Глоссарий.ru: Финансово-кредитные организации. URL: <http://www.glossary.ru> (дата обращения: 29.07.2017).
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000. – 304 с.

Формула общего представления решения и условия разрешимости квазилинейного неоднородного уравнения типа Коши-Римана

Магомедов Г.А., Гилалова З.О. (г.Махачкала, ДГУ, ДГУНХ)

Рассматривается квазилинейное уравнение типа Коши-Римана

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = f(z, w), \quad (1)$$

где функция $f(z, w)$ удовлетворяет условию

$$|f(z, w(z))| \leq A(z)|W|^2, \quad (2)$$

где $A(z)$ - не отрицательная функция из класса $L_p(\bar{G})$, $p > 2$, т.е.

$$\|A(z)\|_{L_p} = \left(\iint_G |A(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

Теорема 1. Если $W \neq 0$ – обобщенное решение уравнения (1), где функция $f(w, z)$ удовлетворяет условию (4), то функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{w} - \omega(z), \quad (4)$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta, w(\zeta)) d\xi d\eta}{W^2 \zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (5)$$

аналитична в G .

Следствие. Всякое обобщенное решение уравнения (1) представимо в виде

$$W(z) = \frac{1}{\Phi(z) + \omega(z)} \equiv BW, \quad (6)$$

где функция $\omega(z)$ представима в виде (5).

Теорема 2. Если функция $f(z, W)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), $\Phi(z)$ -мероморфная функция с нулями первого порядка и $|\Phi(z)| > c$, где c - некоторая постоянная, то уравнение (1) имеет регулярное решение вида (6).

Существование (по крайней мере одного) решения доказывается применением принципа Шаудера к оператору B .

Если дополнительно предположить выполнение условия

$$\left| \frac{f(z, W_1)}{W_1} - \frac{f(z, W_2)}{W_2} \right| \leq A_1(z) |W_1 - W_2|, \quad (4)$$

где $A_1(z)$ – неотрицательная функция класса $L_p(\bar{G}), p > 1$, то уравнение (1) имеет единственное решение, которое можно найти методом итераций.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988.
2. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск, Наука, 1977.
3. Магомедов Г.А. Основы теории обобщающих аналитических функций одной и многих комплексных переменных, Махачкала. Минвуз РФ, 2003.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

Математическая модель стохастической игры защиты информации

Е.С. Магомедова, М.Т. Раджабова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Любую информацию можно выразить в стоимостном выражении, поэтому заинтересованная сторона стремится ее получить, а обладатель этой информации стремится ее защитить.

Задача состоит в оптимизации этих действий с той и с другой стороны. Для этого предполагаем использовать теорию матричных игр для принятия решения по защите закрытой информации, основанную на теории многошаговых стохастических игр. [1], [2], [3], [4].

Для нахождения оптимального решения в течение промежутка времени T применяем метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана [3]. Для этого промежуток времени T разбиваем на несколько периодов точками $t_i (i = 1, \dots, N)$, считая $t_{i+1} - t_i = h_i$ шагом. На каждом шаге представляем матрицу игры стационарной и переход от одного состояния к другому совершаем с определенной вероятностью $\beta_i (i = 1, 2, \dots, N)$, которая считается переходной вероятностью состояния системы [5]. Переходная вероятность зависит от предшествующего состояния системы и действия самих игроков.

Число переходов игры из одного состояния в другое может происходить в течение длительного времени. Для того чтобы игра протекала в течение конечного времени T , можно ввести условие: после определенного количества шагов переходную вероятность считать равной нулю.

Предположим, что в многошаговой игре участвуют двое игроков A и B . Игра задана в матричной форме S . Через $S = (S_1, S_2, \dots, S_N)$ обозначим множество состояний игры.

При каждом шаге игру рассматриваем как отдельную матричную игру и выбираем случайным образом стратегии игроков для игрока $A = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_m^{(i)})$

для игрока $B = (q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, \dots, q_n^{(k)})$. Для матрицы игры $M = \|a_{kl}\| (k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n)$ находим цену игры как математическое ожидание

$$V_i = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n p_k q_l a_{kl}.$$

Суммируем полученную цену игры для каждого шага с учетом условной вероятности β_i

$$V = \sum_{i=1}^N \beta_i V_i.$$

Полученная сумма будет выражать цену всей игры.

Литература

1. Конюховский П.В., Малова А.С. Теория игр. – М,Изд. Юрайт, 2014.
2. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. – СПб, Изд. Лань, 2010.
3. Есипов Б.А. Методы исследования операций. – СПб, Изд. Лань, 2013.
4. Магомедов И.И., Магомедова Е.С. Элементы теории игр. – Махачкала, Изд. ДГУ, 2008.
5. Каралюк В.С. и др. Справочник по теории вероятности и математической статистике. – М: Наука, гл.ред. ф-м лит. 1985.

УДК 519.837.3

Физический, геометрический, экономический смысл дробной производной

Р.И. Магомедов, И.И. Магомедов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

До последнего времени для количественного описания исследуемого процесса, протекающего в природе, использовались соответствующие уравнения с использованием неизвестных функций и их производных целых порядков. Для производных целого порядка точно установлен их геометрический, физический, экономический смысл. Задачи, связанные с созданием математических моделей неравновесных процессов, оставались не

достаточно изученными. Видимо, это связано с невозможностью объяснения таких процессов с помощью производных функций целого порядка.

На наш взгляд, целые показатели размерности любого процесса бывают у неподвижных, конечных пространств. Но любой процесс протекает во времени. А время бесконечно. Поэтому в реальном пространстве все находится в состоянии движения. Когда время стремится к бесконечности, предел размерности практически невозможно представить. Если рассматривать фрактальную среду, то любая элементарная частица этого процессадвигается бесконечно и хаотично-то замедляя, то убыстряя свое движение. Поэтому, в такой среде частица движется то медленнее, то быстрее относительно первой производной.

При описании фрактальных процессов используется дробная производная, но до сих пор в научной литературе не описан смысл дробной производной.

Нами предполагается один из вариантов описания физического, геометрического, экономического смысла дробной производной.

А именно, если дана функция движения $y = f(t)$, и рассматривается её дробная производная

$$y^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t), \text{ при } 0 < \alpha < 1,$$

то она также будет выражать максимальную скорость движения материальной точки, но уже меньшую, чем при $\alpha = 1$ столько раз, каков знаменатель правильной дроби.

Например, если $\alpha = \frac{1}{2}$, т.е. $y^{(\frac{1}{2})} = f^{(\frac{1}{2})}(t)$, то максимальная скорость в любой момент времени t будет в 2 раза меньше, чем при $\alpha = 1$; если $\alpha = \frac{1}{3}$, то в 3 раза и т.д.

Аналогично для дробной производной при $1 < \alpha < 2$ происходит тот же процесс относительно ускорения материальной точки в любой момент времени t . При $\alpha \rightarrow 1$ ускорение материальной точки падает до обычной скорости, а при $\alpha \rightarrow 2$ скорость увеличивается и достигает максимального ускорения.

При таком подходе к определению физического смысла дробной производной можно интерпретировать и геометрический смысл. А именно, дробная производная относительно целой производной показывает количественное уменьшение или увеличение размерности материальной точки и выражает коэффициент размерности.

Экономику можно рассматривать как динамическую систему, а значит дробную производную от производственной функции можно рассматривать аналогично изменению скорости при физическом смысле относительно первоначального состояния.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: изд. Наука и техника, 1987.
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, изд. КБНЦ РАН, 2000.
3. Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А. Динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка. – Махачкала. изд. ДГУ, 2012.

УДК 536.712; 536.752

К расчёту термодинамических характеристик воды на основе фрактального уравнения состояния

**Р.А. Магомедов ^{1*}, Р.Р. Мейланов ¹, Э. Н. Ахмедов ¹, В.Д. Бейбалаев ^{2,1},
А.А. Аливердиев ^{1,2}**

Махачкала, ¹ ИПГ ДНЦ РАН

² Дагестанский государственный университет

**** e-mail: ramazan_magomedov@rambler.ru***

Переход от обычных производных к производным дробного порядка представляет собой один из естественных способов учета принципа локального

неравновесия. Реализуя его на основе экспериментально измеренных значений P , V , T и полученного однопараметрического «фрактального» уравнения состояния можно определить значение показателя производной дробного порядка α по термодинамическим параметрам и далее рассчитать термодинамические характеристики пользуясь полученными аналитическими выражениями.

Мы представляем обобщение термодинамики в формализме производных дробного порядка, позволяющее учесть нелокальные эффекты в термодинамических процессах [1, 2]. Результаты традиционной термодинамики Карно, Клаузиуса и Гельмгольца получаются в частном случае, когда показатель производной дробного порядка равен единице. Выбор воды обусловлен исключительной важностью данного соединения для множества приложений.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 16-08-00067а.

1. *Magomedov R.A., Meilanov R.P., Akhmedov E.N., and Aliverdiev A.A.* Calculation of multicomponent compound properties using generalization of thermodynamics in derivatives of fractional order, *Journal of Physics: Conference Series*, **774**, 2016, 012025.
2. *Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А.* Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик аргона // *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки*, **32**, No. 1, 2017, 6-11.

To the calculation of the thermodynamic characteristics of water on the basis of the fractal equation of state

**R.A. Magomedov^{1*}, R. R. Meilanov¹, E.N. Akhmedov¹,
V.D. Beybalaev^{2,1}, and A.A. Aliverdiev^{1,2}**

¹ *IGR DSC RAS, Shamilys highway, 39A, Makhachkala*

² *Dagestan State University, Gadzhieva str., 43A, Makhachkala*

* *e-mail: ramazan_magomedov@rambler.ru*

The transition from ordinary derivatives to fractional derivatives is one of the natural ways of taking into account the principle of local disequilibrium. Realizing it on the basis of the experimentally measured values P , V , T and the obtained one-parameter "fractal" state equation, we can determine the value of the exponent of the fractional-order derivative α in terms of thermodynamic parameters and then calculate the thermodynamic characteristics using the obtained analytical expressions.

We present a generalization of thermodynamics in the formalism of derivatives of fractional order, which allows one to take into account nonlocal effects in thermodynamic processes [1, 2]. The results of the traditional thermodynamics of Carnot, Clausius, and Helmholtz are obtained in the particular case when the exponent of the fractional derivative is unity. The choice of water is due to the exceptional importance of this connection for a variety of applications.

The work was partially supported by the RFBR grant 16-08-00067a.

1. *Magomedov R.A., Meilanov R.P., Akhmedov E.N., and Aliverdiev A.A.* Calculation of multicomponent compound properties using generalization of thermodynamics in derivatives of fractional order, *Journal of Physics: Conference Series*, **774**, 2016, 012025.
2. *Magomedov R.A., Meilanov R.P., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D. and Aliverdiev A.A.* Fractal equation of state and calculation of thermophysical characteristics of argon // *Bulletin of Dagestan State University. Series 1: The natural sciences*, **32**, No. 1, 2017, 6-11.

УДК 517.95

Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка

Р.Х. Макаова

Нальчик, Институт прикладной математики и автоматизации

- филиал Федерального государственного бюджетного учреждения
 «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
 Российской академии наук»
 e-mail: [makaova.ruzanna@mail.ru](mailto: makaova.ruzanna@mail.ru)

В евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение вида

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, m – заданные положительные числа; $|c| \leq \frac{m}{2}$; $u = u(x, y)$ – действительная функция независимых переменных x и y .

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением Аллера [1, 2], а при $y < 0$ – с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода [3].

Пусть $\Omega^+ = \{(x, y): 0 < x < r, 0 < y < T\}$. Обозначим через Ω^- область, ограниченную характеристиками уравнения (1) при $y < 0$: $A_0C: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $A_rC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r$, выходящими из точек $A_0 = (0, 0)$, $A_r = (r, 0)$ и пересекающимися в точке $C = \left(\frac{r}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}r\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$, $A_0A_r = \{(x, 0): 0 < x < r\}$; $B_0 = (0, T)$, $B_r = (r, T)$; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup A_0A_r$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-)$, $u_{xx}, u_{xxy} \in C(\Omega^+)$, $u_{xx}(x, 0), u_{xxy}(x, 0) \in L_1(A_0A_r)$ и удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1) из класса $u_x \in C(\Omega^+ \cup \overline{A_0B_0} \cup \overline{A_rB_r})$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u_x(0, y) = v(y), u_x(r, y) = v_r(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

$$u|_{A_rC} = h_r(x), \quad \frac{r}{2} \leq x \leq r, \quad (3)$$

где $v(y), v_r(y) \in C^1[0, T]$, $h_r(x) \in C^3[0, r]$.

Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи (2), (3) для уравнения (1).

Литература

1. M. Hallaire, L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique, 1964.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
3. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Высшая школа, 1977. 150 с.

УДК:517.95

Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Римана-Лиувилля в верхней полуплоскости

О.Х. Масаева

Нальчик, Институт прикладной математики и автоматизации

e-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Пусть $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + D_{0y}^{\alpha} D_{0y}^{\alpha} u = 0, \quad (1)$$

где D_{0y}^{α} – оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке 0, $0 < \alpha < 1$, [1].

Ограниченную функцию $u = u(x, y)$ из класса $y^{1-\alpha} u \in C(\bar{\Omega})$ с непрерывными в области Ω частными производными $u_{xx}, D_{0y}^{\alpha} D_{0y}^{\alpha} u$, удовлетворяющую уравнению (1), будем называть регулярным в области Ω решением этого уравнения.

В данной работе получено общее представление решения задачи Дирихле для уравнения (1) в верхней полуплоскости.

Исследуется задача Дирихле в следующей постановке: *найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная функция на всей действительной оси.

Следуя [2], рассмотрим интегральное преобразование

$$B^{\alpha} v(s) = \int_0^{\infty} v(t) t^{-1} \phi(-\alpha, 0, -\frac{s}{t^{\alpha}}) dt,$$

с функцией Райта $\phi(\rho, \delta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\rho n + \delta)}$ в ядре [3].

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\tau(x)$ ограниченная функция на всей действительной оси. Тогда функция $u(x, y)$, определенная по формуле

$$u(x, y) = \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{\pi} \int_0^{\infty} [\tau(x - sy^{\alpha}) + \tau(x + sy^{\alpha})] B^{\alpha} \frac{1}{1+s^{2\alpha}} ds,$$

является регулярным решением задачи (1), (2).

Список литературы.

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение.- М.: Физматлит, 2003. 272с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc., 1933, **8**:29, 71-79.

УДК 519.17

Компьютерная грамматика ЕЯ

Я.М.Мирзабеков, Ш.Б. Шихиев

Махачкала, Дагестанский государственный университет

e-mail:Shshb51@mail.ru¹, e-mail:yash831@mail.ru²

Введение

Рассматриваемая в статье задача нацелена демонстрировать новый подход не только к методике формализации грамматики ЕЯ, но и показать ее возможности в реализации на компьютере. Предлагаемый в статье алгоритм отличается от известных нам работ тем, что он опирается на *конструктивную теорию синтаксиса*, который построен, как раздел дискретного анализа, и в котором *синтаксис* и его элементы (*словосочетание, выражение, предложение* и т.д.) имеют формальные определения ([4]). (Вторая составляющая языка, семантика, здесь не рассматривается) Поставленная задачи довольно объемная для одной статьи. Но в грамматике всегда есть возможность урезать лексику и категории морфологии и на ее упрощенном

варианте демонстрировать основные идеи в построения порождающей грамматики ЕЯ. Именно такой подход используется здесь для демонстрации методики формализации ЕЯ.

Морфология.

В рассматриваемом нами здесь примере лексика состоит из следующих 12 слов в исходных формах.

1. **пол, дом, угол, топор, нож** – имена существительные (ИС), код – 01;
2. **белый, легкий, быстрый** – имена прилагательные (ИП), код – 02;
3. **находится, лежит, спит, строит** – глаголы, код – 07.

Морфологических операторов имеется три, все они сосредоточены в категории падежа с кодом 30: 30 = (31, 32, 35).

Эти три оператора порождают новые формы имен, которые распределены по *семилексическим группам*.

1. 0131 = { **пол, дом, угол, топор, нож** },
2. 0132 = { **пола, дома, угла, топора, ножа** }
3. 0135 = { **полом, домом, углом, топором, ножом** }
4. 0231 = { **белый, легкий, быстрый** },
5. 0232 = { **белого, легкого, быстрого** },
6. 0235 = { **белым, легким, быстрым** },
7. 07 = { **находится, лежит, спит, строит** }.

В коде лексической группы первые две цифры – код части речи, вторые две цифры – код оператора (если он определен на этой группе).

Синтаксис.

Лексические группы являются исходным материалом для построения *словосочетаний* – первичных элементов *синтаксиса*. Рассматриваемы нами пример синтаксиса будет построен на перечисленных вышесемидесяти группах.

Грамматика языка будет построена поэтапно в следующем порядке.

1. *словоформы*
2. *лексические группы*
3. *синтаксические отношения*

4. предложения.

Построение синтаксиса начинается с выбора конечного числа *синтаксических отношений*. *Синтаксическое отношение (СО)* – это прямое произведение двух *лексических групп*. Элементы СО называются *словосочетаниями*.

Произведение множеств $0131*0231 = \{\text{пол, дом, угол, топор, нож}\} * \{\text{белый, легкий, быстрый}\}$ состоит из 12 пар (v, w) , где $v \in 0131, w \in 0231$. Произведение $0131*0231$ будет первым СО для строящегося синтаксиса. Элементы $0131*0231$ – словосочетания этого синтаксиса.

Следующими СО будут: $0132*0232$ и $0135*0235$. В грамматике элементы этих трех СО называются *согласованными определениями*: **(пол, белый), (ножа, легкого), (топором, быстрым)** и т.д.

Следующими СО для строящегося синтаксиса будут $0131*0132$ и $0135*0132$; их элементы называются *несогласованными определениями*: **(пол, дома), (ножа, угла), (топором, пола)** и т.д.

В синтаксис включены два СО с участием глагола: $0131*07$ и $07*0135$.

Таким образом, рассматриваемый нами синтаксис будет построен на следующих семи СО:

1. $0131*0231$
2. $0132*0232$
3. $0135*0235$
4. $0131*0132$
5. $0135*0132$
6. $0131*07$
7. $07*0135$

Через CodeLG обозначим множество из перечисленных выше семи *лексических групп*, CodeR - множество из перечисленных выше семи СО. Как известно CodeG = (CodeLG, CodeR) есть ориентированный граф ([3]), который далее будет назван *синтаксисом*. Граф CodeG показан на Рис. 1. Около дуг указаны номера СО

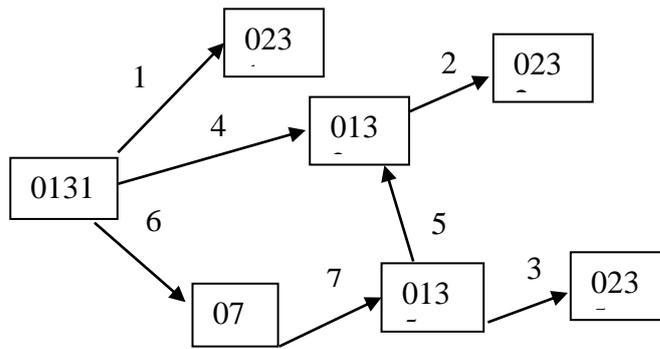


Рис. 1. Граф CodeG.

Если через LG обозначить множество словоформ (объединение всех семи лексических групп), а через R - множество словосочетания (объединение всех семи CO), то получится еще один ориентированный граф $G = (LG, R)$.

Нетрудно заметить, что G однозначно определяется графом $CodeG$. А *синтаксис* $CodeG$ никак не зависит от объема лексики. Когда в лексике будет 100 000 слов, то размеры этих двух графов будут отличаться в тысячи раз.

Функционирование синтаксиса (анализ и синтез предложений) возможен при тесном взаимодействии двух форм представления синтаксиса. Далее будут продемонстрированы возможности синтаксисов G и $CodeG$ в *синтаксическом анализе* предложения.

Элементами синтаксиса (назовем их *выражениями*) являются связанные между собой словоформы. Таким образом, *синтаксическое отношения* первичны, а *предложения* вторичны. Иначе говоря, *выражение* - это набор словоформ, в котором некоторые пары словоформ считаются *связанными*. А *связанными* могут считаться только те пары, которые принадлежат *синтаксическим отношениям*, которые уже заданы.

В графе $CodeG$ нет контуров. Единственный цикл, имеющийся в нем, можно упразднить, дублируя две вершины 0132 и 0232, как показано на Рис. 2.

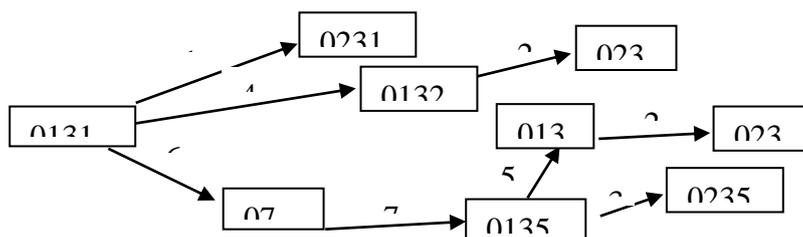


Рис. 2. Граф CodeG без контуров.

Граф G мы не станем рисовать. В нем больше вершин и дуг, нежели в $CodeG$. Глядя на $CodeG$ легко можно представить и G следующим образом. В прямоугольнике 0131 вместо вершины 0131 окажутся четыре вершины с именами: **пол, дом, угол, топор, нож**; а в прямоугольнике 0231 вместо вершины 0231 окажутся три вершины с именами: **белый, легкий, быстрый**; вместо дуги 1 появятся 12 дуг из $CO\ 0131*0231$.

Предложением в синтаксисе G считается любое *корневое дерево* G , если в нем присутствует дуга из $0131*07$. Иначе говоря, в предложении должны быть подлежащее из 0131 и сказуемое из 07.

Корневое дерево в $CodeG$, содержащее дугу δ , называется *синтаксической формой* (СФ) или *правилом*, порождающим предложения в синтаксисе $CodeG1$.

Теперь рассмотрим две процедуры для решения двух стандартных задач в синтаксисе $CodeG$: *синтез (построение)* и *анализ (распознавание) предложения*.

Мы здесь не рассматриваем алгоритмы решения известных задач морфологии: *синтез (построение)* и *анализ (распознавание) словоформ*. Только сформулируем сами задачи.

Анализ и синтез словоформ осуществляются постоянно при восприятии и воспроизведении речи и письма на ЕЯ. Правила *анализа и синтеза словоформ* известны и описаны в грамматике языка. Имеются словари ([1]), в которых описаны правила *анализа* и *синтеза*, и с помощью которых можно произвести *анализ словоформы* и построить формы данного слова.

Для осуществления компьютерного *анализа* и *синтеза словоформ* строятся соответствующие компьютерные словари с удобной для реализации на компьютере кодировкой правил *анализа* и *синтеза*.

Будем считать, что соответствующие процедуры у нас имеются. Кстати, названия лексических групп представляют собой морфологические операторы *синтеза*. Например, $0132(\text{топор}) = \text{топора}$, $0235(\text{белый}) = \text{белым}$ и т.д. Операторы, обратные операторы *синтеза*, являются операторами *анализа*. Например, результатом *анализа* словоформы «топора» являются: **топор** —

исходная форма этой словоформы; и оператор 0132 (01 и 32 называются еще *морфологическими параметрами* словоформы «топора») такой, что $0132(\text{топор}) = \text{топора}$.

Синтез предложения в синтаксисе CodeG. Выбирается некоторое корневое дерево в *CodeG*, содержащее дугу 0131*07. Например, дерево, показанное на Рис. 3.

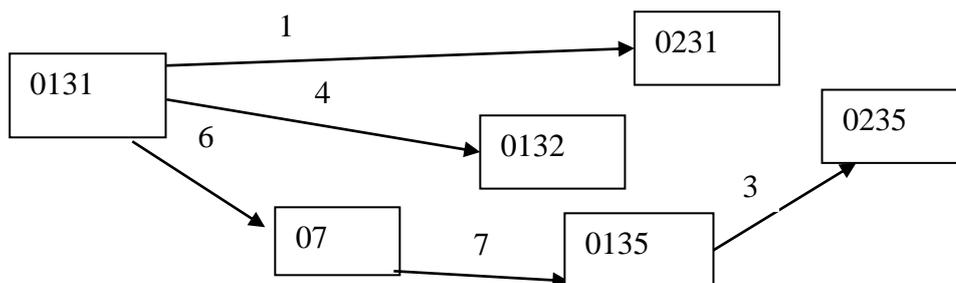


Рис. 3. Дерево в графе *CodeG*.

Выбирается по одному элементу из каждой группы, образующих вершины этого дерева. Имя группы заменяется именем соответствующего элемента. Над каждым словом выполняется соответствующий оператор. Полученное дерево показано на Рис. 4. Это дерево уже будет подграфом графа *G*.

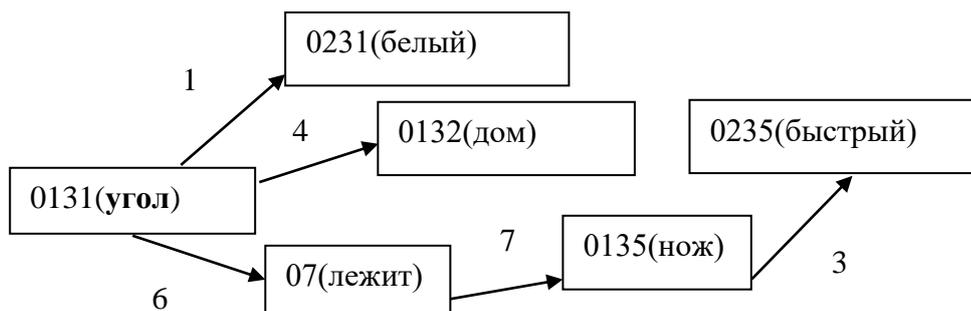


Рис. 1. Дерево в графе *G*.

На следующем шаге осуществляется обход дерева из Рис. 4, в результате чего получим следующую последовательность словоформ.

угол белый дома лежит ножом быстрым

Переставляя ИС и ИП в согласованном определении, как это принято в грамматике русского языка, получим следующее предложение:

белый угол дома лежит быстрым ножом (1)

Синтез предложения в синтаксисе CodeG. Для простоты и доступности в качестве примера рассмотрим последовательность словоформ (1).

На первом шаге анализируются слова из (1). Из результатов анализа для дальнейшей работы нужны только коды лексических групп (*морфологические параметры*), к которым эти слова принадлежат. В нашем примере они таковы:

0131, 0231, 0132, 0232, 07, 0135 и 0235 (2)

На следующем шаге в графе *CodeG* ищется некоторое корневое дерево, порожденное (2) и содержащее дугу 0131*07. Если оно будет найдено, то рассматриваемая последовательность словоформ образует предложение в синтаксисе *CodeG*. Такое дерево в *CodeG* имеется, оно показано на Рис. 3.

Если такого дерева в *CodeG* не окажется, то рассматриваемая последовательность словоформ не образует предложение в синтаксисе *CodeG*.

Заключение

Здесь мы оперировали синтаксисом *CodeG*- вырезкой из синтаксиса русского языка – для наглядной доступности задач *анализа* и *синтеза* алгоритмовых решения. Нетрудно заметить, что показанная выше методика не претерпит существенных изменений при построении грамматики и, в частности, синтаксиса *CodeG* для всей грамматики русского языка. Изменяются размеры словаря и синтаксиса - графа *CodeG*.

Литература

1. Зализняк А. А. Грамматический словарь русского языка. Словоизменения.: - М., Русский язык, 1987.
2. Мирзабеков Я. М. Неформальное описание задачи распознавания предложения. //Известия КБНЦ РАН. №6(74) 2016 г. с. 51-55
3. Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.
4. Шихиев Ф.Ш. Формализация и сетевая формулировка задачи синтаксического анализа. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук.: – СПб.: СпбГУ, 2006. 171 с.
5. Шихиев Ш.Б., Мирзабеков Я.М. Компьютерная модель самодостаточного синтаксиса. //НТВ СПбГПУ. №2(76) 2009. с. 171-175.

УДК 517.9

**Эллиптические уравнения с измеримыми коэффициентами
в обобщенных весовых пространствах Морри**

Ш.А. Мурадова, М.Н. Омарова

Бакинский Государственный Университет

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

В работе получена оценка глобального обобщенного весового пространства Морри $M_w^{p,\varphi}$ для градиента слабых решений дивергенции эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами в негладкой ограниченной области. Коэффициенты, при этом, считаются просто измеримыми по одной переменной и имеют полу-нормы в смысле small BMO по остальным переменным, а граница области считается плоской областью Райфенберга, которая выходит за пределы категории областей с липшицевыми непрерывными границами. Как следствие основного результата, мы получаем глобальную градиентную оценку для слабого решения в рамках обобщенных весовых пространств Морри.

Литература

1. Guliyev Vagif S., Muradova Shamsiyya A., Omarova Mehriban N. and Softova Lubomira G. "Gradient estimates for parabolic equations in generalized weighted Morrey spaces". Acta Mathematica Sinica, English Series Aug., 2016, Vol. 32, No. 8, pp. 911–924.
2. A.Eroglu, M.Omarova, Sh.Muradova. Elliptic equations with measurable coefficients in generalized weighted Morrey spaces. Proceedings of IMM NAS of Azerbaijan, 2017 (December), vol.43 (2), pp.17.

УДК 517.977.53

**Существование решения системы уравнений в вариациях
в одной задаче оптимального управления**

К.С. Мусабеков

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова,

E-mail: it.kgu@mail.ru, Республика Казахстан, г.Кокшетау)

В данной работе рассматривается задача оптимального управления одной математической моделью химического реактора. Устанавливается существование решения системы уравнений в вариациях в Соболевском пространстве.

Пусть $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, T – фиксированное число. В области Q_T рассмотрим систему дифференциальных уравнений, являющуюся математической моделью неадиабатического трубчатого реактора [5]:

$$\left. \begin{aligned} D_t v_1(x, t) &= a \cdot D_x^2 v_1(x, t) - D_x v_1(x, t) - c \cdot v_1 \cdot f(v_2), \\ D_t v_2(x, t) &= b \cdot D_x^2 v_2(x, t) - D_x v_2(x, t) + k \cdot v_1 \cdot f(v_2) + g \cdot (v_3(t) - v_2(x, t)), \\ D_t v_3(t) &= p \cdot \left(\int_0^1 v_2(x, t) dx - v_3(t) \right) + u(t) \cdot (E - v_3(t)) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с граничными

$$\left. \begin{aligned} a \cdot D_x v_1(0, t) - v_1(0, t) &= -1, & D_x v_1(1, t) &= 0, \\ b \cdot D_x v_2(0, t) - v_2(0, t) &= -1, & D_x v_2(1, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и начальными условиями

$$v_1(x, 0) = v_{10}(x), v_2(x, 0) = v_{20}(x), v_3(0) = v_{30} \quad (3)$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma / v_2(x, t))$ (в работе [1] доказана справедливость неравенства $v_2(x, t) \neq 0$, $(x, t) \in \overline{Q_T}$); $a, b, c, \Gamma, k, g, d, E, v_{30}$ – константы, положительные параметры системы; $u(t)$ – управляющая функция (управление); $v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(t)$ – функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

Здесь будут использованы обозначения функциональных пространств, принятые в работе [2]. Приведем обозначение еще одного функционального пространства.

$C_1[0, T]$ – банахово пространство непрерывных функций $v(t)$, заданных на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющих условию Липшица, с нормой

$$\|v\|_{C_1} = \sup_{0 \leq t \leq T} |v(t)| + \sup_{t', t'' \in [0, T], t' \neq t''} \frac{|v(t') - v(t'')|}{|t' - t''|}.$$

Для задачи (1)–(3) была доказана [3] теорема существования и единственности решения $v_1(x, t), v_2(x, t) \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$, $v_3(t) \in C_1[0, T]$ при произвольной функции $u(t) \in U_\partial$, где

$$U_\partial = \{u(t) : 0 \leq u(t) \leq u_0 = \text{const}, u(t) - \text{измеримая функция}, 0 \leq t \leq T\}.$$

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1, t) dt, \quad (4)$$

т. е. суммарного за время T количества, непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1) – (3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(x, t)$:

$$u(t) \in U_\partial, \quad (5)$$

$$v_2(x, t) \leq v_2^* = \text{const}. \quad (6)$$

Таким образом, имеем следующую задачу оптимального управления.

Задача. Среди всех измеримых управлений удовлетворяющих условию (5), найти $u(t)$, при котором для соответствующего решения $v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(t)$ системы (1) – (3), выполняется условие (6) и функционал (4) достигает минимального значения.

В [1] доказана теорема существования оптимального управления в задаче 1.

Численное решение данной задачи основано на необходимом условии оптимальности, аналогичной принципу максимума Л.С.Понтрягина [4]. При выводе необходимого условия оптимальности в задаче (1)–(6) возникают так называемые «сопряженная система» и «система уравнений в вариациях». В нашем случае, система уравнений в вариациях имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} D_t h_1(x,t) &= a \cdot D_x^2 h_1(x,t) - D_x h_1(x,t) - c \cdot a_{11}(x,t) \cdot h_1 - c \cdot a_{12}(x,t) \cdot h_2 + \varphi_1(x,t), \\ D_t h_2(x,t) &= b \cdot D_x^2 h_2(x,t) - D_x h_2(x,t) + k \cdot a_{11}(x,t) \cdot h_1 + (k \cdot a_{12}(x,t) - g) \cdot h_2 \\ &\quad + g \cdot h_3(t) + \varphi_2(x,t), \\ D_t h_3(t) &= p \cdot \left(\int_0^1 h_2(x,t) dx - h_3(t) \right) - u(t) \cdot h_3 + (E - v_3(t)) \bar{u}(t) + \varphi_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

с граничными

$$\left. \begin{aligned} a \cdot D_x h_1(0,t) - h_1(0,t) &= 0, \quad D_x h_1(1,t) = 0, \\ b \cdot D_x h_2(0,t) - h_2(0,t) &= 0, \quad D_x h_2(1,t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и начальными условиями

$$h_1(x,0) = \varphi_4(x), \quad h_2(x,0) = \varphi_5(x), \quad h_3(0) = \varphi_6 \quad (9)$$

где $a_{11}(x,t) = f(v_2(x,t))$, $a_{12}(x,t) = v_1(x,t) \cdot \frac{df(v_2)}{dv_2}$.

Будем считать, что

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), \quad v_3(t) \in C_1[0, T], \quad u(t) \in U_\partial.$$

Теорема 1. Для любых функций

$$\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in L_2(Q_T), \quad \varphi_3(t) \in L_2(0, T), \quad \varphi_4(x), \varphi_5(x) \in W_2^1(0, 1),$$

и конечного числа $\varphi_6 \in R$, система уравнений (7)-(9) имеет решение

$$h_1(x,t), h_2(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T), \quad h_3(t) \in W_2^1(0, T), \quad \bar{u}(t) \in U_\partial \quad (\text{в частности, при } \bar{u}(t) \equiv 0, 0 \leq t \leq T).$$

Литература

1. Мусабеков К.С. Теоремы существования решения в одной задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация. Управляемые системы. Новосибирск, 1982, вып. 22, с. 30-50.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. Мусабеков К.С. Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестник Новосибирского гос ун-та. Серия: Математика, механика, информатика.

2010. Т.10. Вып. 2, с. 71-84.

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
5. Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors // Chemical Engineering Science. 1977/ v.32. No 11, p.1359-1387.

УДК: 519.95

Моделирование динамических взаимодействующих процессов с применением подклассов нечётких временных сетей Петри

В.А.Мустафаев, М.Н.Салманова

Одной из основных задач нечеткого моделирования является исследование параллельных динамических взаимодействующих процессов, функционирующих в условиях неопределенности, обусловленной нечеткостью временных, ресурсных и других ограничений [1,2]. Структурные связи, функциональные и причинно-следственные отношения между элементами системы, характеризующимися неопределенными параметрами, усложняют решение задачи.

Перспективно в данном случае применение различных расширений моделирующего аппарата нечеткой сети Петри. В докладе представлена в виде нечеткой временной сети Петри (НВСП) модель параллельно функционирующих обрабатывающих устройств. Разработан алгоритм вычисления структурных элементов НВСП.

Модель динамических взаимодействующих процессов представляется в виде НВСП.

Нечёткая временная сеть Петри определяется выражением

$$C_T = (N, \mu_0, Z_T, S_T)$$

где $N = (P, T, I, O)$ – структура НВСП: $P = \{p_i\}$, ($i = 1, \dots, n$; n – число позиций) – множество позиций; $T = \{t_j\}$, ($j = 1, \dots, m$; m – число переходов) – множество переходов; $I: P \times T \rightarrow \{0,1\}$; $O: T \times P \rightarrow \{0,1\}$ – соответственно входная и выходная функция переходов;

$\mu_0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_n^0)$ – вектор начальной маркировки, каждый компонент μ_i^0 который представляет собой трапециевидный нечеткий интервал (ТНИ)

$$\mu_i^0 = \langle \mu_{1i}^0, \mu_{2i}^0, \mu_{3i}^0, \mu_{4i}^0 \rangle (i \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – вектор параметров временных задержек маркеров в позициях НВСП, каждый компонент z_i который представляет собой ТНИ

$$z_i = \langle z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, z_{4i} \rangle, (i \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

$s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ – вектор параметров времен срабатывания разрешенных переходов НВСП, каждый компонент s_j который представляет собой ТНИ

$$s_j = \langle s_{1j}, s_{2j}, s_{3j}, s_{4j} \rangle, (j \in \{1, 2, \dots, m\}).$$

Текущее состояние НВСП определяется вектором $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, компоненты которого представляет собой ТНИ $\mu_i = \langle \mu_{1i}, \mu_{2i}, \mu_{3i}, \mu_{4i} \rangle, (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ и интерпретируется как значения функции принадлежности нечеткого наличия одного маркера в соответствующих позициях $p_i \in P$ относительно времени, отсчитываемого от момента запуска данной НВСП.

ТНИ называется нормальный нечеткий интервал, функция принадлежности которого задается трапециевидной функцией. ТНИ представляется в виде кортежа из четырех чисел: $A = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle$, где a и b – соответственно нижнее и верхнее модальные значения ТНИ; α и β левый и правый коэффициенты нечеткости ТНИ [4].

Для решения задач нечеткого моделирования необходимо определить некоторые операции над ТНИ, аналогичные арифметическим операциям над обычными числами и интервалами. Для определения аналогов обычных арифметических операций над нечеткими числами и нечеткими интервалами используются принцип обобщения [3].

При решении практических задач удобно использовать матричное представление структуры НВСП. Элементы матриц входных d_{ij}^- , выходных d_{ij}^+ позиций и инциденций d_{ij} определяется так [4]:

$$d_{ij}^- = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i \in I(t_j), \\ 0, & \text{если } p_i \notin I(t_j), \end{cases}; d_{ij}^+ = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i \in O(t_j), \\ 0, & \text{если } p_i \notin O(t_j), \end{cases}; d_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } p_i \in I(t_j), p_i \notin O(t_j), \\ 1, & \text{если } p_i \notin I(t_j), p_i \in O(t_j), \\ 0, & \text{если } p_i \notin I(t_j), p_i \notin O(t_j), \end{cases}$$

Начало алгоритма

Шаг 1. Создание входных и выходных матриц представляющих входную и выходную функции НВСП в размерности $m \times n: d_{ij}^-, d_{ij}^+ (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$.

Шаг 2. Определение размерности и ввод временных параметров НВСП:

$$\mu_{ij}, z_{ij} (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n}); s_{ij} (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, m}).$$

Шаг 3. Полагают: $k = 1$.

Шаг 4. Полагают: $j = 1; q = 1; i = 0$.

Шаг 5. Индекс i увеличивается на единицу: $i = i + 1$.

Шаг 6. Если выполняется условие $i \leq n$, то осуществляется переход к шагу 7, в противном случае к шагу 15.

Шаг 7. Создание промежуточной матрицы $\mu_{li}^1: \mu_{li}^1 = \mu_{li}; (l = \overline{1, 4})$.

Шаг 8. Если выполняется условия $(\mu_{1i}^1 = 0) \wedge (\mu_{2i}^1 = 0) \wedge (\mu_{3i}^1 = 0) \wedge (\mu_{4i}^1 = 0)$, то осуществляется переход к шагу 5, в противном случае к шагу 9.

Шаг 9. Вычисляют: $\mu_{li}^1 = \mu_{li} + z_{li}; (l = \overline{1, 4})$.

Шаг 10. Если выполняется условие $i = d_{kj}^-$, то осуществляется переход к шагу 11, в противном случае к шагу 5.

Шаг 11. Если $j = 1$, то полагают:

$\{\max_a = \mu_{1i}^1; \max_b = \mu_{2i}^1; \max_\alpha = \mu_{3i}^1; \max_\beta = \mu_{4i}^1\}$ и осуществляется переход к шагу 12, в противном случае к шагу 13.

Шаг 12. Обнулирование элементов матрицы $\mu_{li}^1: \mu_{li}^1 = 0 (l = \overline{1, 4})$; индекс j увеличивается на единицу: $j = j + 1$ и осуществляется переход к шагу 5.

Шаг 13. Полагают: $a_1 = \max_a$; $a_2 = \mu_{1i}^1$.

Шаг 14. Если выполняется условие $a_1 \geq a_2$, то $\max'_a = a_1$, в противном случае $\max'_a = a_2$;

14.1 полагают: $b_1 = \max_b$; $b_2 = \mu_{2i}^1$;

14.2 если выполняется условие $b_1 \geq b_2$, то $\max'_b = b_1$, в противном случае $\max'_b = b_2$;

14.3 полагают: $\alpha_1 = \max_\alpha$; $\alpha_2 = \mu_{3i}^1$; $\beta_1 = \max_\beta$; $\beta_2 = \mu_{4i}^1$; вычисляют:
 $\alpha'_1 = a_1 - \alpha_1$; $\alpha'_2 = a_2 - \alpha_2$;

14.4 если выполняется условие $\alpha'_1 \geq \alpha'_2$, то $\max'_\alpha = \alpha'_1$, в противном случае $\max'_\alpha = \alpha'_2$;

14.5 вычисляют: $\max_\alpha = \max'_\alpha - \max'_\alpha$; $\beta'_1 = b_1 + \beta_1$; $\beta'_2 = b_2 + \beta_2$;

14.6 если выполняется условие $\beta'_1 \geq \beta'_2$, то $\max'_\beta = \beta'_1$, в противном случае $\max'_\beta = \beta'_2$;

14.7 вычисляют: $\max_\beta = \max'_\beta - \max'_\beta$; осуществляется переход к шагу 12.

Шаг 15. Полагают: $i=1$.

Шаг 16. Если выполняется условие $i \leq n$, то осуществляется переход к шагу 17, в противном случае переход к шагу 25.

Шаг 17. Если выполняется условие $i = d_{kq}^+$, то осуществляется переход к шагу 18, в противном случае индекс i увеличивается на единицу: $i=i+1$ и осуществляется переход к шагу 16.

Шаг 18. Создание промежуточной матрицы μ_{li}^2 : вычисляют:

$$\left\{ \mu_{1i}^2 = \max_a + s_{1k}; \mu_{2i}^2 = \max_b + s_{2k}; \mu_{3i}^2 = \max_\alpha + s_{3k}; \mu_{4i}^2 = \max_\beta + s_{4k} \right\}.$$

Шаг 19. Если выполняется условия $(\mu_{1i}^1 = 0) \wedge (\mu_{2i}^1 = 0) \wedge (\mu_{3i}^1 = 0) \wedge (\mu_{4i}^1 = 0)$, то осуществляется переход к шагу 20, в противном случае переход к шагу 21.

Шаг 20. Полагают: $\mu_{li}^1 = \mu_{li}^2$; ($l = \overline{1,4}$); индекс i увеличивается на единицу: $i=i+1$ и осуществляется переход к шагу 16.

Шаг 21. Если выполняется условие $q=1$, то полагают:

$\{\min_a = \mu_{1i}^2; \min_b = \mu_{2i}^2; \min_\alpha = \mu_{3i}^2; \max_\beta = \mu_{4i}^2\}$ и осуществляется переход к шагу 22, в противном случае переход к шагу 23.

Шаг 22. Полагают $\{\mu_{1i}^1 = \min_a; \mu_{2i}^1 = \min_b; \mu_{3i}^1 = \min_\alpha; \mu_{4i}^1 = \min_\beta\}$; значение q увеличивается на единицу: $q=q+1$ и осуществляется переход к шагу 17.

Шаг 23. Полагают: $a_1 = \min_a; a_2 = \mu_{1i}^2$.

Шаг 24. Если выполняется условие $a_1 \leq a_2$, то $\min'_a = a_1$, в противном случае $\min'_a = a_2$;

24.1 полагают: $b_1 = \min_b; b_2 = \mu_{2i}^2$;

24.2 если выполняется условие $b_1 \leq b_2$, то $\min'_b = b_1$, в противном случае $\min'_b = b_2$;

24.3 полагают: $\alpha_1 = \min_\alpha; \alpha_2 = \mu_{3i}^2$; $\beta_1 = \min_\beta; \beta_2 = \mu_{4i}^2$;

вычисляют: $\alpha'_1 = a_1 - \alpha_1; \alpha'_2 = a_2 - \alpha_2$;

24.4 если выполняется условие $\alpha'_1 \leq \alpha'_2$, то $\min'_\alpha = \alpha'_1$, в противном случае $\min'_\alpha = \alpha'_2$;

24.5 вычисляют: $\min_\alpha = \min'_\alpha - \min'_\alpha; \beta'_1 = b_1 + \beta_1; \beta'_2 = b_2 + \beta_2$;

24.6 если выполняется условие $\beta'_1 \leq \beta'_2$, то $\min'_\beta = \beta'_1$, в противном случае $\min'_\beta = \beta'_2$;

24.7 вычисляют: $\min_\beta = \min'_\beta - \min'_b$ и осуществляется переход к шагу 22.

Шаг 25. Новая маркировка принимается за текущую: $\mu_{lr} = \mu_{lr}^1; (l = \overline{1,4}; r = \overline{1,n})$.

Шаг 26. Значение k увеличивается на единицу: $k=k+1$. Если $k \leq m$, то осуществляется переход к шагу 4.

Конец алгоритма.

Разработанный алгоритм вычисления структурных элементов НВСП обеспечивает удобные преобразования внешних данных во внутренний формат, используемый в среде моделирование, эффективную форму представления структуры, динамику состояния модели, пространство достижимых состояний

и последовательность срабатывания переходов в виде совокупности векторов и матриц, упрощение и ускорение процесса моделирования, выявления тупиковых состояний. На основе предложенного алгоритма разработано программное обеспечение в среде BorlandDelphi 7.0.

Библиографический список

1. **Егоров А.С., Шайкин А.Н.** Логическое моделирование в условиях неопределенности на базе нечетких интервальных сетей Петри // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. №2. С.134-139.

2. **Ding Z., Zhou Y., Zhou M.** A Polynomial Algorithm to Performance Analysis of Concurrent Systems Via Petri Nets and Ordinary Differential Equations. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. 2015. V. 12, №1. P. 295–308.

3. **Борисов В.В., Круглов В.В, Федулов А,С.** Нечеткие модели и сети.– Телеком, Москва, 2012, 284 с.

4. **Леоненков А.В.** Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – БХВ–Петербург, Санкт–Петербург, 2005, 717 с.

УДК 621.396.965.8

Численные методы для дробных операторов в системах обработки изображений

А.Л. Нагоров

Нальчик, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М.

Бербекова

В последние годы существенное внимание уделялось развитию теоретической и практической базы нового (эредитарного) подхода к обработке данных, который основан на использовании дробных операторов. Дробные операторы обладают рядом преимуществ перед классическими, однако широкое применение эредитарных методов сдерживается высокими затратами на вычислительные процессы. Для них необходимо применение высокопроизводительных вычислительных систем (ВВС) и ориентированных

на них численных методов. Это связано с тем, что в настоящее время применяются различные типы архитектур ВВС, и для каждой требуется специфическая организация алгоритмов обработки. Основой разработки подобных методов служит методология пространственного гранулирования многомерных данных, позволяющая строить кубатурные формулы для дробных операторов.

Введение

Классическая методология цифровой обработки изображений, возникшая с широким внедрением вычислительной техники, основывается на гипотезе локальности помехи [1] и жестких ограничений на число операций для численных методов [2].

В настоящее время широкое развитие и применение нашла теория дробных операторов, которые расширяют понятие классических операторов, и что принципиально важно, являются нелокальными [3]. Такие свойства позволили разработать весьма удачные (с точки зрения адекватности физике) математические модели многих процессов. Применение новых математических моделей поддерживается широким внедрением новых типов высокопроизводительных вычислительных систем (ВВС), открывающих новые возможности в численных решениях для новых моделей. Наиболее высокой производительности позволяют достичь реконфигурируемые ВС (РВС), перестраиваемых в соответствии с требованиями каждой задачи [3].

1. Проблемы обработки изображений

Изображение на картинной плоскости представляет собой множество перекрывающихся окрестностей точек (пикселей). Обработка изображений заключается в преобразовании значений в точках по некоторой функции от окрестности этой точки, т.е. в нахождении свертки по окрестности точки с некоторым ядром. Ядро свертки может быть дифференцирующим, интегрирующим или смешанным, что зависит от знака элементов ядра свертки. Чаще всего используются комбинированные ядра, для конструирования которых используются самые различные подходы [1]. При этом весьма

сложной задачей конструирования ядра свертки является нормирование ядра свертки. При искусственном задании ядер далеко не всегда удается корректно их нормировать, что искажает исходные параметры изображения [2]. В работе предлагается подход к определению ядра свертки с помощью единого универсального подхода, использующего дробные операторы. Такие операторы позволяют реализовать как дифференцирование, так и интегрирование окрестности точки изображения за счет выбора параметров оператора [3]. При этом нормирование происходит естественно, в процессе решения. С этой целью обычно используют формализм Грюнвальда-Летникова, сводя решение задачи к работе с рядами [3]. Однако это вычислительно неэффективно и ограничивает возможность выбора масок для обработки. Более перспективным представляется использование формализма Римана-Лиувилля, основанного на классической задаче Абеля [4].

2. Обратная задача для дробных дифференциальных операторов

Хорошо известно, что решение классического интегрального уравнения Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = f(x), \quad x > a, \quad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$ на конечном отрезке $[a; b]$ вещественной оси выражается формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt. \quad (2)$$

Левая часть (1) и правая часть (2) известны как дробный интеграл и дробная производная Римана-Лиувилля соответственно

$$\frac{d^q \phi}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x \frac{\phi(y)}{[x-y]^{q+1}} dy = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^{x-a} \frac{\phi(x-v)}{v^{q+1}} dv, \quad (3)$$

где $v \equiv x - y$, или

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x \frac{\phi(y)}{[x-y]^{q+1}} dy = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^{x-a} \frac{\phi(x-v)}{v^{q+1}} dv, \quad q < 0 \quad (4)$$

Для уравнения (2) на основе формализма (3) и (4) возможно построение кубатурных формул на основе гранулирующего подхода [2].

3. Построение квадратурных формул на моделях гранул

На основе (3) и (4) мы можем записать базовый вариант формулы трапеций для уравнения типа Абея по (2) со структурой для параллельно-конвейерной реализации на реконфигурируемой вычислительной системе в виде:

$$(5) \quad \int_a^x \frac{f(x-v)}{v^{q+1}} dv = \left[\begin{array}{c} \left[\sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{x_{k-1}(x_k - x_{k-1})^q}{q} - \frac{(x_k - x_{k-1})^{q+1}}{q+1} \right) \cdot f(x_{k-1}) \right] \right] - \left[\sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{x_k(x_k - x_{k-1})^q}{q} - \frac{(x_k - x_{k-1})^{q+1}}{q+1} \right) \cdot f(x_k) \right] \right] \\ \left[\sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{x_k(x_k - x_{k-1})^q}{q} - \frac{(x_k - x_{k-1})^{q+1}}{q+1} \right) \cdot f(x_k) \right] \right] - \left[\sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{x_{k-1}(x_k - x_{k-1})^q}{q} - \frac{(x_k - x_{k-1})^{q+1}}{q+1} \right) \cdot f(x_{k-1}) \right] \right] \\ 0 \quad \frac{1}{2} \\ 0 \quad \frac{1}{2} \\ 1 \quad 0 \end{array} \right] + R(x)$$

Отметим, что с использованием свойств определителей мы можем записать и другие (комбинированные) структуры квадратурных формул [2]. Методическая погрешность формулы (5) определяется классическими соображениями о порядке точности квадратурных формул [5], а вычислительная погрешность зависит от структуры формулы и должна исследоваться для каждого случая реализации структуры вычислений [4].

Заключение

Предложенная квадратурная формула для дробных операторов реализуема на параллельных вычислительных структурах и может использоваться для восстановления данных (изображений) при обработке на реконфигурируемых ВС. Эти результаты применимы как к классическим задачам, так и к обработке дробными операторами, поскольку операторы интегрирования и дифференцирования являются частными случаями дробных операторов.

Литература

- [1] Бейтс Р., Мак-Доннел М. Восстановление и реконструкция изображений: Пер. с англ.– М.:Мир, 1989.– 336 с., ил.
- [2] Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N. Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation // XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science 103 (2017) pp. 295-302.
- [3] Hu J.R., Pu Y.F. and Zhou J.L. "A novel image denoising algorithm based on

- Riemann-Liouville definition". Journal of Computers, vol. 6. (2011). pp. 1332-1338.
- [4] Нагоров А.Л. Методы математического моделирования процессов на гранулированных моделях физических сред // В сб. трудов Международной научной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование» ИВТ&ММ, Кемерово, 23-30 июня 2013 г., с. 134-137.
- [5] Oldham K.B. and Spanier J. "The fractional calculus". Academic Press. New York. (1974).
- [6] Nazaraliev M., Beybalaev V., Ibayov T. Digital Image Processing based on Fractional Differentiation Operators // Proc. Of International Russian-Chinese Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Physics".— Elbrus, Kabardino-Balkarian Republic, December 15-18, 2015. Kabardino-Balkarian State University, 2015, pp. 142-145.

УДК 517.929

Аналог теоремы Фельдбаума для разностного уравнения

Р.М. Нигматулин, М.М.Кипнис, М.Ю.Вагина

Челябинск, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет

Исследования больших уклонений (всплесков) решений дифференциальных уравнений и систем проводились в работах [1, 4] при изучении некоторых переходных процессов в устойчивых системах. Качественному изучению всплесков решений непрерывных систем, их оценкам при ненулевых начальных условиях посвящены работы [2, 3]. Для дискретных систем эти вопросы изучены мало.

Рассмотрим линейное разностное уравнение k -го порядка

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x_{-k+1} = x_{-k+2} = \dots = x_{-1} = 0, \quad x_0 = 1. \quad (2)$$

Пусть все корни характеристического полинома уравнения (1) суть равные действительные числа $\lambda_i = \lambda > 0$. Тогда для начальных условий (2) решение уравнения (1) имеет вид

$$\tilde{x}_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!} \lambda^n = C_{n+k-1}^{k-1} \cdot \lambda^n.$$

В случае устойчивости нулевого решения (когда все корни удовлетворяют неравенству $|\lambda_i| < 1$) при небольших n образуется «горб» и решение значительно уклоняется от стационарного положения. Следующая теорема схожа с Теоремой 1 (теоремой Фельдбаума) из [4].

Теорема. Пусть все корни характеристического полинома уравнения (1) действительные и удовлетворяют неравенству $|\lambda_i| \leq \lambda < 1$. Тогда для начальных условий (2) решение уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$|x_n| \leq \tilde{x}_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!} \cdot \lambda^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «КГПУ им. В.П. Астафьева» по договору на выполнение НИР № 16-746 от 21.06.2017 г.

Литература

1. Измайлов Р.Н. Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 8. С. 56-62.
2. Поляк Б.Т., Тремба А.А. Аналитическое решение линейного дифференциального уравнения с одинаковыми корнями характеристического полинома // Сборник трудов XII всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 212-217.
3. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18-41.
4. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // Автоматика и телемеханика. 1948. № 4. С. 253-279.

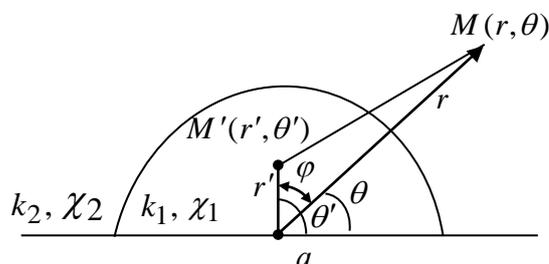
Неустановившееся движение жидкости в полубесконечном пласте

З.Н.Рагимова

Сумгаит, Сумгаитский Государственный Технический Колледж.,

e-mail: r.ziba@mail.ru

В отличие от работы [1,2] здесь предполагается, что в полубесконечном пласте, с одной стороны, имеется прямолинейный контур питания. Кроме того, в пласте имеется зона в виде полукруга, диаметр которого совпадает с контуром питания. Внутри полукруговой зоны (зона I) коэффициенты проницаемости и пьезопроводности имеют другие значения, чем во всей остальной части пласта (зоне II). В начальный момент времени давление во всей пласте считается постоянным и равным P_0 . На вышележащем пласте давление также считается постоянным и равным P_0 . Скважина, работающая с заданным переменным дебитом $Q_0(t)$, где функция $Q_0(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле, расположена в производной точке разрабатываемого пласта в зоне I.



Требуется определить функцию давления в любой момент времени в произвольной точке пласта.

Рассматриваемую задачу математически можно сформулировать следующим образом: найти решение уравнение

$$\Delta P_i - \alpha_i^2 (P_i - P_0) = \frac{1}{\chi_i} \frac{\partial P_i}{\partial t}, (i=1,2) \quad (1)$$

при следующих дополнительных условиях

$$P_1(r, \theta, t) = P_2(r, \theta, t) = P_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (2)$$

$$\left(R \frac{\partial P_1}{\partial R} \right)_{R \rightarrow 0} = \frac{\mu Q^*(t)}{2\pi b k_i} \equiv Q(t) \quad (3)$$

$$P_1(r, \theta, t) = P_2(r, \theta, t), \frac{\partial P_1}{\partial r} = \nu \frac{\partial P_2}{\partial r} \text{ при } r = a \quad (4)$$

$$P_2(r, \theta, t) = P_0 \text{ при } r = \infty \quad (5)$$

где

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad i=1,2; \quad \alpha_i^2 = \frac{k_{ri}}{k_i \cdot b b_{ri}};$$

$$0 \leq \theta \leq \pi; t > 0; \quad r \in \begin{cases} [0, a], i=1 \\ [a, \infty], i=2 \end{cases}$$

При $i=1$ все соотношения относятся к первой зоне; а при $i=2$ - к второй. $Q^*(t)$ -дебит скважины, P_i -возможное усредненное значение функции давления пласта, (r, θ) -цилиндрические координаты, t -время, (r', θ') -координаты точки пласта, в которой помещена скважина, k_i и χ_i коэффициенты проницаемости и пьезопроводности, b и b_r -мощности пласта и перемычки, k_{ri} -коэффициент проницаемости перемычки.

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа

$$\bar{P}_i(r, \theta, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P_i(r, \theta, t) dt \quad (6)$$

где \bar{P}_i -изображение функции P_i , λ -параметр преобразования Лапласа.

Преобразование (6) сводит задачу к интегрированию следующей системы:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} - q_i^2 u_i = 0, \quad (7)$$

где $q_i^2 = \alpha_i^2 + \frac{\lambda}{\chi_i}$, $u_i = \frac{1}{\lambda} P_0 - \bar{P}_i$.

Решая уравнение, получаем формулы для функции давления

$$P_0 - P_1 = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin n\theta' \int_0^{\infty} \frac{\nu J_n(ur') J_n(u\bar{r})}{M_n^2 + N_n^2} f(u, t) du,$$

$$P_0 - P_2 = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin n\theta' \int_0^{\infty} \frac{M_n Y_n(\rho\bar{r}) - N_n(\rho\bar{r})}{\rho(M_n^2 + N_n^2)} J_n(u\bar{r}') f(u, t) du \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{k_2}{k_1}, \quad M_n = \sigma_0 J(u) J'_n(u) J_n(\rho) - J'_n(u) J_n(\rho), \\
 N_n &= \sigma_0 J_n(u) Y'_n(\rho) - J'_n(u) Y_n(\rho), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\chi_2}} \sqrt{\chi_2 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \chi_1 + \chi_1 u^2}, \\
 \bar{r} &= \frac{r}{a}, \quad \bar{r}' = \frac{r'}{a}, \quad \sigma_0 = v \frac{\rho}{u}, \quad \eta = \frac{u^2}{a^2} + \alpha_1^2 \\
 f(u, t) &= \int_0^t \exp[-\chi_1(t-\tau)\eta] Q(\tau) d\tau, \quad \sigma = v \frac{q_2}{q_1},
 \end{aligned}$$

J_n, Y_n - цилиндрические функции действительного аргумента.

Если проницаемость внешней зоны равно нулю, (т.е. если $k_2 = 0$), то будем иметь:

$$P_0 - P_1 = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin n\theta' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\alpha_{n,m} \bar{r}') J_n(\alpha_{n,m} \bar{r})}{(\alpha_{n,m}^2 - n^2) J_n^2(\alpha_{n,m})} E(\alpha_{n,m} t) \quad (9)$$

где $\alpha_{n,m}$ - являются положительным корням уравнения

$$\begin{aligned}
 J'_n(\alpha) &= 0, \\
 E(\alpha_{n,m} t) &= \int_0^t \exp\left[-\chi_1 \left(\frac{\alpha_{n,m}^2}{a^2} + \alpha_1^2\right) \tau\right] Q(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Для случая, когда скважина работает с постоянным дебитом, (т.е. когда $Q(t) = Q = const$), формулы (8) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 P_0 - P_1 &= Q \left\{ P_{1cm}^{(1)}(r, \theta) - \frac{4a^2}{\chi_1 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin n\theta' \int_0^{\infty} \frac{v J_n(u, \bar{r}') J_n(u, \bar{r}) \exp\left[-\chi_1 \left(\frac{u^2}{a^2} + \alpha_1^2\right) t\right]}{(M_n^2 + N_n^2)(n^2 + \alpha_1^2 a^2)} du \right\}, \\
 P_0 - P_2 &= Q \left\{ P_{2cm}^{(1)}(r, \theta) - \frac{8a^2}{\chi_1 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin n\theta' \int_0^{\infty} \frac{J_n(u \bar{r}') [M_n Y_n(\rho \bar{r}) - N_n J_n(\rho \bar{r})]}{\rho (M_n^2 + N_n^2)(u^2 + \alpha_1^2 a^2)} \times \right. \\
 &\times \left. \exp\left[-\chi_1 \left(\frac{u^2}{a^2} + \alpha_1^2\right) t\right] du \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

где

$$P_{1cm}^{(1)}(r, \theta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \sin n\theta' \left[I_n(\alpha r') I_n(\alpha r) + \frac{\delta K_n(\alpha_1 a) K_n'(\alpha_2 a) - K_n'(\alpha_1 a) K_n(\alpha_2 a)}{I_n'(\alpha_1 a) K_n(\alpha_2 a) - \delta I_n(\alpha_1 a) K_n'(\alpha_2 a)} I_n(\alpha_1 r') I_n(\alpha_1 r) \right]$$

$$P_{2cm}^{(2)}(r, \theta) = \frac{4}{\alpha_1 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\alpha_1 r') K_n(\alpha_2 r) \sin n\theta \sin n\theta'}{I_n'(\alpha_1 a) K_n(\alpha_2 a) - \delta I_n(\alpha_1 a) K_n'(\alpha_2 a)}, \quad \delta = \nu \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Как видно из формулы (10) они являются решениями соответствующих стационарных задач. Они удобны для проведения гидродинамических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.- Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. Изд.-во «Недра», М., 1972.
2. Гусеунов Г.П., Велиев М.Н.- Движение упругой жидкости в упругом кусочно-однородном пласте. Труды АзНИИ, вып. 18, 1967.

УДК 517. 948

Верхнее и нижнее решения для интегрального включения Урысона с отклоняющимся аргументом

В.Р.Рагимханов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Рассмотрим задачу

$$x(t) = \int_a^b K(t, s, x(h(s))) ds, \quad t \in [a, b],$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \notin [a, b]$$
(1)

при обычных условиях, налагаемых на функцию $K(t, s, u)$ при рассмотрении уравнения Урысона ([1]), за исключением одного – не предполагается непрерывность $K(t, s, u)$ по переменной u . Попытка функционально-аналитической формулировки задачи (1) при таких условиях наталкивается на ту сложность, что подынтегральная функция в (1) может оказаться неизмеримой. Желание сохранить операторный подход к исследованию этой задачи вынуждает в обобщенной трактовке правой части (1). На этом пути,

исходя из подынтегральной функции $K(t, s, u)$ и непрерывных функций h, φ , строится многозначный оператор $\mathcal{E}_K^{h, \varphi}$, зависящий от t как от параметра:

$$\mathcal{E}_K^{h, \varphi} x := \{y(t, s) \mid (S_K^{h, \varphi} x)(t, s) \leq y(t, s) \leq (S_K^{h, \varphi} x)(t, s)\}.$$

Здесь $S_K^{h, \varphi}$ и $s_K^{h, \varphi}$ – верхняя и нижняя регуляризации "оператора"

$$K: x(s) \mapsto \begin{cases} K[t, s, x(h(s))], & \text{при } h(s) \in [a, b], \\ K[t, s, \varphi(h(s))], & \text{при } h(s) \notin [a, b] \end{cases}$$

(точные определения см. [2]).

Далее, задача (1) рассматривается как интегральное включение

$$x \in \mathcal{E}x \tag{2}$$

где \mathcal{E} – многозначный интегральный оператор, определяемый следующим образом: $y \in \mathcal{E}x$ означает, что $y(t)$ – непрерывна и существует $g \in \mathcal{E}_K^{h, \varphi} x$ такое, что $y(t) = \int_a^b g(t, s) ds$, $t \in [a, b]$. Для включения (2) установлены теоремы существования.

Теорема. Пусть функция $K(t, s, u)$ удовлетворяет указанным выше условиям и не убывает по $u \in \mathbb{R}^n$ при всех $t \in [a, b]$ и почти всех $s \in [a, b]$. Пусть $v, w \in C_n[a, b]$ такие непрерывные функции, что $v(t) \leq w(t)$ при $t \in [a, b]$ и при всех $t \in [a, b]$ выполнены неравенства

$$w(t) \geq \int_a^b (S_K^{h, \varphi} w)(t, s) ds,$$

$$v(t) \leq \int_a^b (s_K^{h, \varphi} v)(t, s) ds.$$

Определим последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$ и $(y_k)_{k=1}^\infty$ равенствами

$$x_{k+1}(t) = \int_a^b (S_K^{h, \varphi} x_k)(t, s) ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$y_{k+1}(t) = \int_a^b (s_K^{h, \varphi} y_k)(t, s) ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

(здесь $x_0(t) = w(t)$, $y_0(t) = v(t)$). Тогда существуют $x, y \in C_n[a, b]$ такие, что

$x_k(t) \vee x(t)$ и $x \in \mathcal{E}x$,

$y_k(t) \wedge y(t)$ и $y \in \mathcal{E}y$,

Причем

$v(t) \leq y(t) \leq x(t) \leq w(t)$ при $t \in [a, b]$.

Следствие. Решения x, y включения $z \in \mathcal{E}z$, существование которых установлено в предыдущей, теореме являются соответственно верхним и нижним решениями включения этого включения в интервале $[v, w]$; иначе говоря, для любого решения z включения $z \in \mathcal{E}z$, удовлетворяющего неравенствам $v(t) \leq z(t) \leq w(t)$ при $t \in [a, b]$ имеет место неравенства $y(t) \leq z(t) \leq x(t)$.

Литература:

1. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., Наука, 1966.
2. Рагимханов В.Р. Свойства многозначных операторов внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций. Межв. сб. "Функционально-диффер. уравнения и их приложения", вып.2, Махачкала, 1994.

УДК 519.1:519.8

Методы теории графов для анализа интересов пользователей социальных сетей

Н.Ш. Раджабова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Задача определения наиболее полной модели интересов пользователя на основе анализа информации из разных социальных сетей, является нерешенной и актуальной.

В работе используется известное решение Google – эффективный параллельный алгоритм для определения множества аккаунтов, принадлежащих пользователю [1]. На основе анализа построенного

социального графа, разрабатываются метод и программное обеспечение для построения графа интересов пользователя. Получение модели распределения сообщений пользователя по темам предлагается построить на основе алгоритмов построения качественных тематических моделей [2].

Модель интересов строится на основе анализа информации из разных социальных сетей, где может быть зарегистрирован пользователь, с учетом связей пользователя в каждой сети. Удовлетворяет требованию независимости от языков и предметных областей текстовых коллекций, и, поэтому, является более объективной.

1. N Korula, S Lattanzi. An efficient reconciliation algorithm for social networks // Proceedings of the VLDB Endowment 7 (5), 377-388.
2. Нокель М. А. Методы улучшения вероятностных тематических моделей текстовых коллекций на основе лексико-терминологической информации [Электронный ресурс]: дис. ... канд. ф. - м. наук: 05.13.11. URL: https://cs.msu.ru/sites/cmc/files/theses/nokel_dissertation.pdf.

УДК 517.5

О явлении Гиббса для интерполяционных рациональных сплайнов

А.-Р.К. Рамазанов, В.Г. Магомедова

Махачкала, ДГУ, ДНЦ РАН

Найдены условия на сетки узлов для отсутствия и для наличия явления Гиббса при приближении сплайнами по трехточечным рациональным интерполянтам функций, непрерывных на данном отрезке, кроме точки разрыва первого рода со скачком.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, исключая точку $t_0 \in (a, b)$, в которой она имеет разрыв первого рода со скачком.

Для сетки узлов $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{N_n}^{(n)} = b$ ($N_n \geq 2; n = 1, 2, \dots$)

положим $h_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$, $\|\Delta^{(n)}\| = \max \{h_i^{(n)} : i = 1, 2, \dots, N_n\}$. Для числовой

последовательности $\lambda_n > 0$ определим также набор точек

$g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_{N_n-1}^{(n)}\}$ таких, что $g_i^{(n)} = x_{i+1}^{(n)} + \lambda_n h_{i+1}^{(n)}$ при $h_{i+1}^{(n)} \leq h_i^{(n)}$ и $g_i^{(n)} = x_{i-1}^{(n)} - \lambda_n h_i^{(n)}$ при $h_i^{(n)} < h_{i+1}^{(n)}$ ($i=1,2,\dots,N_n-1$).

Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ ($i=1,2,\dots,N_n-1$) однозначно определяется рациональная функция

$$R_i(x) = R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i^{(n)}) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i^{(n)}}$$

с $R_i(x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)})$ при $j = i-1, i, i+1$.

По рациональным интерполянтам $R_i(x)$ определяется сплайн $R_{N_n,1}(x, f) = R_{N_n,1}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ класса $C_{[a,b]}^{(1)}$ такой, что при $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ ($i=1,2,\dots,N$) выполняется равенство

$$R_{N_n,1}(x, f) = R_i(x) \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{h_i^{(n)}} + R_{i-1}(x) \frac{x_i^{(n)} - x}{h_i^{(n)}};$$

считаем, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_{N_n}(x) \equiv R_{N_n-1}(x)$.

Для точки разрыва $t_0 \in (a, b)$ функции $f(x)$ и разбиения $\Delta^{(n)}$ при данном n ($n=1,2,\dots$) для краткости через $[x_{l-1}, x_l]$ и $[x_r, x_{r+1}]$ ($l=l(n)$, $r=r(n)$) обозначим ближайшие соответственно слева и справа к точке t_0 частичные отрезки, не содержащие самой точки t_0 . При этом $h_{l-1}, h_l, h_r, h_{r+1}$ означают длины частичных отрезков разбиения $\Delta^{(n)}$, правые концы которых совпадают соответственно с точками $x_{l-1}, x_l, x_r, x_{r+1}$. Через g_r обозначим полюс дроби $R_r(x, f)$ при условии $h_r < h_{r+1}$, а через g_{l-1} — полюс дроби $R_{l-1}(x, f)$ при условии $h_l \leq h_{l-1}$.

Тогда справедливы следующие два утверждения.

Теорема 1. Для сплайнов $R_{N_n,1}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$ явление Гиббса не имеет места в правой (соответственно, левой) полукрестности точки t_0 , если для любой подпоследовательности номеров $n = n_i$ и соответствующих $r = r(n)$ ($l = l(n)$) с условиями $h_{r+1} \leq h_r$ и $h_r < h_{r+1}$ ($h_{l-1} < h_l$ и $h_l \leq h_{l-1}$)

выполняются соответственно соотношения $h_{r+1} \equiv \bar{\bar{o}}(h_r)$ и $x_{r-1} - g_r = \bar{\bar{o}}(h_r)$ ($h_{l-1} = \bar{\bar{o}}(h_l)$ и $g_{l-1} - x_l = \bar{\bar{o}}(h_l)$).

Теорема 2. Для сплайнов $R_{N_n,1}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ с $\|\Delta^{(n)}\| \rightarrow 0$ имеет место явление Гиббса в правой (соответственно, левой) полуокрестности точки t_0 , если при некотором $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность номеров $n = n_i$, для которой и соответствующих $r = r(n)$ ($l = l(n)$) выполняется хотя бы одно из двух условий:

- 1) $h_r \geq h_{r+1} \geq \varepsilon h_r$ ($h_l > h_{l-1} \geq \varepsilon h_l$);
- 2) $h_r < h_{r+1}$ и $x_{r-1} - g_r \geq \varepsilon h_r$ ($h_l \leq h_{l-1}$ и $g_{l-1} - x_l \geq \varepsilon h_l$).

Отметим также, что для функции $f(x) = \text{sign}(x - t_0)$ на отрезке $[a, b]$ с $t_0 \in (a, b)$ в случае равномерных сеток узлов $\Delta^{(n)}$ и последовательности $\lambda_n \equiv 1$ значение предела $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow t_0 + 0}} R_{N_n,1}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ равно $1 + \frac{3}{4}(5\sqrt{5} - 11) = 1,13525\dots$,

если при всех достаточно больших n точка разрыва t_0 совпадает с одним из узлов сетки $\Delta^{(n)}$, и оно равно $1 - \frac{3}{2}(5\sqrt{5} - 11)$, если t_0 не совпадает с узлами $\Delta^{(n)}$ при сколь угодно больших номерах n .

Аналогично обстоит дело с соответствующим нижним пределом в левой полуокрестности точки t_0 .

УДК 534.113

Колебания балки с заделанными концами с учетом динамического гистерезиса

С.Ш. Рехвиашвили¹, А.В. Псху¹, А.М. Кидакоев²

Нальчик, ¹ИПМА КБНЦ РАН

Черкесск, ²Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия

В рамках подхода, предложенного в [1,2], проводится моделирование колебаний жестко заделанной с двух сторон балки с учетом эффекта динамической памяти, который описывается с помощью дробного интегро-дифференцирования. Предполагается, что в момент времени $t=0$ в точке $x = x_0 \in]0, l[$ на балку производится мгновенный удар, где l – длина балки. В области $\Omega =]0, l[\times]0, T[$ рассматривается задача:

$$\frac{\partial^{2H}}{\partial t^{2H}} u(x, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) = 0, \quad H \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right], \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = v_0 \cdot \delta(x - x_0), \quad 0 < x < l,$$

где $\frac{\partial^{2H}}{\partial t^{2H}}$ – дробная производная Капуто порядка $2H$ по временной переменной t , $\delta(x - x_0)$ – дельта-функция Дирака, v_0 – коэффициент, определяющий энергию удара. При записи (1) использовались безразмерные переменные t и x . Чтобы привести задачу (1) к безразмерному виду, время и координата были соответственно отнесены к τ и $\sqrt[4]{EJ\tau^2/(\rho S)}$, где E и \square – эффективный модуль упругости и плотность материала, S и J – площадь и момент инерции поперечного сечения балки.

Задача расчета физических характеристик балки жестко заделанной с обеих сторон концами является весьма важной в строительной механике [3]. Вопросы теории деформирования и колебаний балок изложены в [3-5]. Краевая задача в случае заделанной с двух сторон балки изучена в [6].

Армированные балки, применяемые на практике наиболее часто, имеют повышенную несущую способность и жесткость. Использование армирующих конструкций приводит к неоднородному распределению напряженного состояния внутри изделия, что в свою очередь служит причиной появления динамического гистерезиса при возникновении нагрузок. Для учета этого явления эффективным оказывается аппарат дробного дифференцирования [7, 8]. Различные задачи для параболических уравнений высокого порядка с дробной

производной, в том числе и для уравнения колебаний балки, рассмотрены в работах [9-11].

В настоящей работе в аналитическом виде найдено решение основного уравнения модели. Проведены численные расчеты, которые показали, что наличие динамической памяти приводит к существенным изменениям характера колебаний балки и, в известной мере, эквивалентно учету диссипации.

Литература

1. Рехвиашвили С.Ш. // Письма в ЖТФ. 2004. Т.30. №2. С.33–37.
2. Рехвиашвили С.Ш. // Нелинейный мир. 2007. Т.5. №4. С.194-197.
3. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1976. – 511 с.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
6. Сабитов К.Б. // Вестн. Сам.гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т.19. №2. С.311–324.
7. Олемской А.И., Флат А.Я. // УФН. 1993. Т.163. №12. С.1–50.
8. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.
9. Agrawal O.M. // Computers and Structures. 2001. V.79. P.1497-1501.
10. Berdyshev A.S., Cabada A., Kadirkulov B.J. // Computers & Mathematics with Applications. 2011. V.62. N10.P.3884–3893.
11. Карашева Л.Л. // Известия КБНЦ РАН. 2016. Т.70. №2. С.10-14.

**Решение смешанных задач для систем Тимошенко и
Брессе методом динамической граничной регуляризацией**

Н.А. Рзаева, Е.М. Фархадова

Институт математики и механики НАН Азербайджана

В работе [1] Тимошенко получил следующую систему гиперболических уравнений

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - K(u - \varphi)_x = 0, \\ I_\rho \varphi_{tt} - (EI\varphi_x)_x + K(u_t - \varphi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

в $(0, \infty) \times (0, 1)$, с граничными условиями

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0, \quad u_x(0, t) - \varphi(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) - \varphi(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

и с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

Данная система - простая модель, описывающая поперечные колебания балки. Здесь t обозначает временную переменную, а x - пространственную переменную вдоль балки длины L в равновесной конфигурации, u - поперечное смещение балки, φ - угол поворота нити балки. Коэффициенты ρ , I , ρ , E , I и K составляют соответственно плотность (масса на единицу длины), полярный момент инерции поперечного сечения, модуль упругости Юнга, момент инерции поперечного сечения и модуля сдвига.

В этом направлении проводились многочисленные исследования, в которых рассматривали различные задачи для систем (1).

При помощи регуляризации граничных условий с динамическими граничными условиями исследовано существование решений задачи (1) -(3). Предложенный метод позволяет исследовать различные линейные и нелинейные системы Тимошенко, а также Брессе.

Литература

1. S. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, Philos. Mag. 41 (1921), pp. 744–746.

УДК 517.9+43

О свойствах одного интегрального оператора из импульсных представлений гамильтонианов квантовомеханических систем

М.К. Ризаев

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Рассмотрим оператор $V(z)$, порождаемый соотношением

$$V(z)\varphi(\vec{x}) = \int_{R^3} \frac{\vartheta(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{y}|^2 - z} d\vec{y} \quad (1)$$

в пространстве $L^2(R^3)$. Оператор $V(z)$ имеет приложения в различных задачах математической физики, естествознания. В частности, при исследовании спектральных свойств импульсных представлений гамильтонианов квантовой механики используются его свойства [1] – [3]. При вещественных положительных Z интегральные уравнения, порождаемые оператором $V(z)$, становятся сингулярными, а они, как известно, имеют многочисленные приложения в задачах теории потенциала, теории упругости и других разделов математической физики [4].

Предположим, что функция ϑ удовлетворяет условиям

$$\vartheta(\vec{x}) = \overline{\vartheta(-\vec{x})}; |\vartheta(\vec{x})| \leq C_0(1 + |\vec{x}|)^{-\alpha_0}, \alpha_0 > 3. \quad (2)$$

Вещественное число λ , при котором оператор $E + V(\lambda)$ необратим, назовем особой точкой оператора $V(z)$. Оператор

$$H\varphi(\vec{x}) = |\vec{x}|^2\varphi(\vec{x}) + \int_{R^3} \vartheta(\vec{x} - \vec{y})\varphi(\vec{y})d\vec{y} \quad (3)$$

с областью определения

$$D(H) = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\vec{x}|^2)^2 |\varphi(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty \right\}$$

является импульсным представлением гамильтониана квантовой частицы во внешнем поле.

Лемма 1. Особые точки оператора $V(z)$ принадлежат дискретному спектру оператора H , и обратно, собственные числа оператора H есть особые точки оператора $V(z)$.

Лемма 2. Множество отрицательных особых точек оператора $V(z)$ счетно и может иметь предельной только точку $\lambda = 0$.

Теорема. Множество неположительных особых точек оператора $V(z)$ находятся на сегменте $[-\pi^4 C_2^2; 0]$.

Воспользовавшись данными предложениями, можно получить соответствующие утверждения относительно спектра импульсных представлений гамильтонианов квантово-механических систем. Оператор $V(z)$ имеет особенность при $\lambda \in [0; +\infty)$, не является ядерным при $\lambda \in (-\infty; 0)$. Поэтому получение количественных оценок относительно спектра гамильтонианов является весьма серьезной и трудной задачей.

1. Фадеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. М.; Труды МИАН им.В.И. Стеклова, Т.69, 1963.
2. Ризаев М.К. Об отрицательном спектре одночастичного оператора Шредингера, заданного в импульсном представлении. II Всесоюзный семинар «Магнитные фазовые переходы и критические явления». Тезисы докладов. г.Махачкала, 1989, с.147-148.
3. Ризаев М.К. Об устойчивости непрерывного спектра двухчастичного оператора Шредингера относительно возмущений. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5305-В 90, 1990 г..
4. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М.;Физматлит, 1962.

**О влиянии дисперсных частиц на турбулентное движение
двухфазной среды**

К.Ф. Рустамова, П.Ф. Гахраманов

Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

e-mail: kama_faiq@mail.ru, polad49@mail.ru

Теперь рассмотрим турбулентное течение жидкости с дисперсными частицами постоянной концентрации. Осредненное движение жидкой фазы описывается уравнением импульса в продольном направлении, которое следует из осредненного уравнения баланса импульса потока среды в целом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle C \rangle \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) = \\ = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle u_i u_k \rangle - \langle C \rangle \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle v_i v_k \rangle \right) \end{aligned}$$

в приближении $\langle V_k \rangle = \langle U_k \rangle$

$$\frac{\partial \langle P_x \rangle}{\partial x} = \frac{1}{R_e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\left(1 + \frac{v_T}{\nu} \left(1 + f_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} (\varphi) \right) \right) \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} - \text{Re} \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle \varphi \rangle \langle V \rangle \langle U \rangle \right] \right\} \quad (1)$$

Здесь масштаб координат служат радиус трубы R , масштаб скорости – средняя скорость жидкой фазы U_m , масштаб давления $\rho_1 U_m^2 / 2$; $\text{Re} = 2RU_m / \nu$ - число Рейнольдса жидкости. Последний член справа в (1) описывает перенос импульса за счет миграции частиц поперек потока.

Уравнение баланса турбулентной энергии жидкой фазы можно получить из систем уравнений для вторых одноточечных моментов пульсаций скорости жидкой фазы при стационарном турбулентном течении несущей среды

$$\begin{aligned}
& \left[\langle U_i \rangle + \langle V_k \rangle \left(f_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} + f_3 + f_5 \right) \right] \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + f_5 \langle C \rangle \left[\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle) \right] + \\
& + \langle u_j u_k \rangle \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_2 \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \right) + \left[1 + \langle C \rangle \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} f_1 + f_3 + f_5 \right) f_2 \right] \frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k} = \\
& = -\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right) + \left\langle \frac{P}{\rho_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + v \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k \partial x_k} - 2v \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle - \\
& - 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle C \rangle f_4 \frac{\langle u_i u_j \rangle}{T_E}
\end{aligned}$$

$$f_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) F(s) ds, \quad f_2 = \frac{1}{\tau^2} \int_0^\infty s \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) F(s) ds, \quad f_3 = 1 - f_1,$$

$$f_4 = \frac{T_E}{\tau} (1 - f_1) - \frac{9}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{T_E}{a} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{d}{ds} F(s) - \Phi(s),$$

$$f_5 = \frac{9}{2} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} (F(s) - \Phi(s)), \quad \Phi(s) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{s}{\tau}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) F(\xi) d\xi$$

Для ее замыкания используем соотношение Ротга, описывающее диссипацию турбулентной энергии. Члены, учитывающие турбулентную диффузию, представляются в градиентном виде. В безразмерной форме уравнение баланса турбулентной энергии жидкости принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{v_T}{v} \left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} \right)^2 \left(1 + f_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle \varphi \rangle f_2 \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\alpha_1}{2} E^{1/2} L \right] \frac{\partial E}{\partial r} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} f_2 + f_3 + f_5 \right) \langle \varphi \rangle \langle V_r \rangle \frac{\partial E}{\partial r} - \left(\frac{c}{2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle \varphi \rangle \frac{f_4}{\gamma} \right) \frac{E^{1/2}}{L} - \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{E}{L^2} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

где v_T - турбулентная кинематическая вязкость жидкости.

Для определения v_T из системы уравнений (2) выписывается уравнение для рейнольдсовых напряжений $\langle U_x U_r \rangle$, полученный результат замыкается с использованием аппроксимацией Ротга для обменных и диссипативных членов, а также соотношения

$$\langle U_r^2 \rangle = k_1 E. \tag{3}$$

где $k_1 = 0.2$. В результате для турбулентной вязкости v_T получается выражение

$$\frac{v_T}{v} = \alpha_1 \operatorname{Re}_E \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle \varphi \rangle f_2 \right) \left[1 + \frac{\delta}{\operatorname{Re}_E} + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \langle \varphi \rangle \frac{f_1}{k\gamma} \right]^{-1} \quad (4)$$

который является обобщением гипотезы Колмогорова на турбулентное течение жидкости с дисперсными частицами. Макромасштаб турбулентности отождествляется с длиной переименования

$$L = 0.14 - 0.08r^2 - 0.06r^4 \quad (5)$$

Временной микромасштаб турбулентности определяется по формуле $T_0 = \lambda/E^{1/2}$, где λ - пространственный микромасштаб. Используя выражение Ротта для отношения пространственных микро – и макромасштабов, получаем

$$T_0/T_E = \left(\gamma \sqrt{c_1 + c \operatorname{Re}_E} \right)^{-1} \quad (6)$$

Из уравнения импульса дисперсной фазы в поперечном направлении, получается выражение для миграционной скорости частиц

$$\langle V_r \rangle = -2\gamma k_1 \Pi f_1 \frac{L}{E^{1/2}} \frac{dE}{dr} \quad (7)$$

Значения констант c , c_1 , α , α_1 , δ , k выбираются из решения задачи о пристанном течении жидкости: $c = 0.13$, $c_1 = 0.32$, $k = 1.16$, $\alpha = 0.2$, $\delta = 14$. Оценочное значение постоянной γ , может быть получено из формулы $T_E = E/\varepsilon$, где $\varepsilon = cE^{1/2}/L$ - диссипация турбулентной энергии жидкости, что дает $\gamma \approx 8$.

Систему уравнений (1)-(7) с граничными условиями $r = 0$, $\frac{d\langle U \rangle}{dr} = \frac{dE}{dr} = 0$ и $r = 1$, $\langle U \rangle = E = 0$ можно решать численными методами. В результате анализа установлено, что малые добавки дисперсных частиц в турбулентный поток оказывают двойное воздействие на гидродинамические характеристики течения. Во – первых, частицы ослабляют интенсивность пульсаций жидкой фазы; причем для газозвеси уменьшение турбулентной энергии газа вызывается в основном дополнительной диссипацией за счет пульсационного скольжения фаз при медленном стоковом обтекании, в то время как для суспензий основную роль играет рассеяние частицами мелкомасштабных пульсаций около стенки. Во – вторых, на дисперсные частицы в неоднородном турбулентном потоке воздействуют силы пульсационного происхождения, ускорения от

которых сравнимы с величинами характерных ускорений в потоке, и вызывающие, миграцию частиц, поперек потока. Последний приводит к дополнительному переносу энергии и импульса в пристанную область течения. Наряду с этим частицы, принимая участие в пульсационном движении жидкой фазы, увеличивают турбулентную диффузию и пульсационной энергии жидкой фазы.

УДК 51-72

К методам приближенных вычислений значений радикалов

И.С. Сафарли, Б.Я. Сафарли

Сумгаит, Сумгаитский Государственный Университет

e-mail:i.safarli@mail.ru

Вычисление значений радикалов имеет важное значение при решении прикладных задач. Кроме того, вычисление радикалов может быть использовано в вычислительной практике при подготовке учителей математики и информатики. Нами были рассмотрены возможности применения одной из основных теорем дифференциального исчисления (теорема Лагранжа) для вычисления приближенных значений функций [1]. Особенно это важно для тех функций, аналитическое задание которых не содержит вычислительных операций ($\ln x, a^x, \arctg x$ и т.п.). При определенных условиях теорема Лагранжа позволяет устранить этот пробел.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке $[a, b]$, то она будет удовлетворять этим условиям на любом элементарном промежутке

$[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]: [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] = [a, b]$, где $x_0 = a, x_n = b$.

Следовательно, для $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеет место приближенное равенство

$$f(x) \cong f(x_i) + f'(\bar{x}_i)(x_{i+1} - x_i)$$

(1)

где $f'(\bar{x}_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \bar{x}_i \in]x_i, x_{i+1}[$.

Вычисление по формуле (1) можно сделать достаточно простым, если соответствующим образом подобрать узлы и шаг интерполирования. Для вычисления радикалов $\sqrt[k]{x}$ вычислительная схема, полученная при помощи формулы (1) имеет вид:

$$\sqrt[k]{x} \cong \left[\sqrt[k]{x_{n-1}} + \frac{\left(\frac{1}{h}\right)^k}{n^k - (n-1)^k} (x - x_{n-1}) \right], \quad (2)$$

где $x_{n-1} = (n-1)^k h^k; x \in [(n-1)^k h^k; n^k h^k]$ h – шаг интерполирования:

$$n = E\left[\frac{1}{h}\sqrt[k]{x}\right] + 1.$$

Путем несложных преобразований формула (2) представима в виде (3).

$$\sqrt[k]{x} \cong h \left[(n-1) + \frac{1}{n^k - (n-1)^k} \left(\frac{x}{h^k} - (n-1)^k \right) \right]. \quad (3)$$

Рассмотрим два случая:

1. При $h = 0,1$ получаем формулу (3) в виде

$$\sqrt[k]{x} \cong 0,1 \left[(n-1) + \frac{1}{n^k - (n-1)^k} \left(10^k x - (n-1)^k \right) \right]. \quad (4)$$

где $n = E[10^k \sqrt[k]{x}] + 1; x \in [(n-1)^k 0,1^k; n^k 0,1^k]$

2. При $h = 0,2$ формула (3) приобретает вид (5)

$$\sqrt[k]{x} \cong 0,2 \left[(n-1) + \frac{1}{n^k - (n-1)^k} \left(5^k x - (n-1)^k \right) \right], \quad (5)$$

где $n = E[5^k \sqrt[k]{x}] + 1; x \in [(n-1)^k 0,2^k; n^k 0,2^k]$

Формулы вычисления $\sqrt[k]{x}$ имеют наиболее простой вид когда $k = 2$.
 Например, если взять $h = 0,1$, то получаем формулу

$$\sqrt{x} \cong \left[\sqrt{x_{n-1}} + \frac{10}{2n-1}(x - x_{n-1}) \right], \quad (6)$$

где $n = E[10\sqrt{x}] + 1$; $x \in \left[\left(\frac{n-1}{10} \right)^2; \left(\frac{n}{10} \right)^2 \right]$.

Литература

6. Бахвалов Н.С. Численные методы. –М.: Наука, 1975.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. –М.: Наука, 1966, ч. 1; Физматгиз, 1962, ч. 2.
8. Воеводин В.В. Численные методы алгебры; теория и алгоритмы. –М.: Наука, 1966.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. –М.: Наука, 1978.
10. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. – Киев: Высшая школа, 1977.
11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. –М.: Наука, 1980.

О гольдеровости решений краевой задачи Римана-Гильберта для обобщенной системы Бельтрами с нормальными матрицами коэффициентов

М.М. Сиражудинов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Рассмотрим следующую краевую задачу Римана-Гильберта

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \partial_{\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(Q) \\ \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \quad \int_{\partial Q} \operatorname{Im} u \, ds = 0, \\ u \in W_2^1(Q), \end{cases} \quad (1)$$

где μ, ν — нормальные матрицы (т.е. матрицы перестановочные с сопряженными) порядка $n \geq 1$ с элементами из $L_\infty(Q)$, причем почти всюду в Q спектральные радиусы $\rho(\mu(x))$ и $\rho(\nu(x))$ удовлетворяют оценке

$$\rho(\mu(x)) + \rho(\nu(x)) \leq k_0 < 1,$$

где $k_0 > 0$; u, f — n -векторы, \bar{u} — вектор-функция комплексно-сопряженная u ; Q — ограниченная односвязная область плоскости с гладкой границей.

Краевая задача (1) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q)$.

Пусть $f \in L_q(Q)$, $q > 2$, тогда имеет место

Теорема. *Найдется показатель $p > 2$, зависящий только от k_0 , такой, что решение u краевой задачи Римана-Гильберта гельдерово*

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha,$$

где $\alpha = (p - 2)/p$, $c > 0$ — постоянная, зависящая только от Q и $\|f\|_{L_p(Q)}$.

О G-компактности одного класса эллиптических систем второго порядка¹

М.М. Сиражудинов, С.П. Джамалудинова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Пусть $W(Q) = \{u \in W_2^2(Q); \operatorname{Re} u = 0 \text{ на } \partial Q, \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0\}$.

Рассмотрим класс $\mathcal{A}(k_0; Q)$ операторов, действующих из $W(Q)$ в $L_2(Q)$ вида

$$Au \equiv \partial_{z\bar{z}}^2 u + \mu \partial_{zz}^2 u + \nu \partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 \bar{u} = f,$$

где $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ — измеримые в области Q комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию:

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} (|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leq k_0 < 1,$$

где k_0 — положительная константа, $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная гладкая односвязная область класса $C^{2+\alpha}$. Имеет место

Теорема. *Задача Пуанкаре $Au = f \in L_2(Q)$, $u \in W(Q)$ однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q)$. Более того, имеют место оценки:*

$$(1 - k_0) \|\partial_{z\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; C)} \leq \|Au\|_{L_2(Q; C)} \leq (1 + k_0) \|\partial_{z\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; C)} \quad (2)$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u\|_{L_2(Q; C)}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q Au \overline{\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u} dx \quad (3)$$

$$u \in W(Q)$$

Очевидно, что из неравенств (2), (3) легко следует неравенство:

$$\operatorname{Re} \int_Q Au \overline{\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 v} dx \leq \frac{1 + k_0}{1 - k_0} \left(\operatorname{Re} \int_Q Au \overline{\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u} dx \right)^{1/2} \|\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 v\|_{L_2(Q; C)}.$$

Дадим понятие G-сходимости

Определение. Скажем, что последовательность операторов $\{A_k\} \subset \mathcal{A}(k_0; Q)G$ – сходится в области Q к $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$, если $\{A_k^{-1}\}$ слабо сходится к A^{-1} , где A_k и A операторы задачи Пуанкаре $A_k u_k = f \in L_2(Q; C)$, $u_k \in W(Q)$, $Au = f \in L_2(Q; C)$, $u \in W(Q)$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Класс $\mathcal{A}(k_0; Q)G$ -компактен.

О гельдеровости решений одной задачи Римана-Гильберта для треугольных систем²

М.М. Сиражудинов, Ш.Р. Рамазанов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Рассмотрим следующую задачу Римана-Гильберта

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \partial_{\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(Q) \\ \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \quad \int_{\partial Q} \operatorname{Im} u ds = 0, \\ u \in W_2^1(Q), \end{cases} \quad (1)$$

где μ, ν — нижние (или верхние) треугольные квадратные матрицы порядка $n \geq 1$ с элементами из $L_\infty(Q)$, причем для диагональных элементов выполнены оценки

$$\|\mu_{jj}\|_{L_\infty(Q)} + \|\nu_{jj}\|_{L_\infty(Q)} \leq k_0 < 1, j = 1, \dots, n,$$

с постоянной $k_0 > 0$; u, f — n -векторы, \bar{u} — вектор-функция комплексно-сопряженная u ; Q — ограниченная односвязная область плоскости с гладкой границей.

²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00508).

Справедлива следующая

Теорема 1. Краевая задача Римана-Гильберта (1) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q)$.

Пусть правая часть $f \in L_q(Q)$, где $q > 2$, тогда по теореме 1 решение $u \in W_2^1(Q)$.

Более того, имеет место

Теорема 2. Найдется показатель $p > 2$, $p \leq q$, зависящий только от k_0 , такой что решение u гельдерово

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \bar{Q},$$

где $\alpha = (p - 2)/2$, $c > 0$ — постоянная зависящая только от Q и $\|f\|_{L_p(Q)}$.

Неклассическая задача со свободной границей типа Флорина для нагруженного параболического уравнения

Р.Н.Тураев¹, К.Н.Тураев²

Ташкент, Институт Математики АНРУз¹

e-mail: rasul.turaev@mail.ru

Термез, Термезский филиал ТГТУ²

e-mail: k_turaev@mail.ru

Многие актуальные математические модели разнообразных явлений и процессов в механике, физике, биологии, экологии, социологии и др. приводят к изучению линейных и нелинейных параболических уравнений второго порядка [1].

Исследованию краевых задач и задачи Коши для параболических уравнений второго порядка посвящено значительное количество работ, в которых разработаны методы получения априорных оценок, изучены разрешимость задач и проблемы, связанные с гладкостью решений.

А задачи со свободной границей для нагруженного параболического уравнения относятся к категории малоизученных [2,3]. Основы теории нагруженных уравнений были разработаны в работах А.М.Нахушева и его учеников [4,5].

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать неклассические задачи (уравнение или граничное условие дается в неклассической форме) [4,6].

Задачи с нелокальными условиями представляют собой одно из динамично развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений. Нелокальные краевые задачи часто возникают при построении математических моделей различных явлений физики, биологии и экологии. Неклассические задачи с нелокальными граничными условиями используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, которые обусловлены сточными водами [4,5].

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей с нелокальным условием для нагруженного параболического уравнения.

Требуется найти пару функций $u(t, x)$, $s(t)$ таких что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $0 < t \leq T$, $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$ а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$a(t, x)u_{xx}(t, x) - u_t(t, x) = F(u(t, 0)), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (2)$$

$$u_x(t, 0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\alpha u(t, 0) = u(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(t, s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $u(t, x)$, $s(t)$ и их производные. Далее на основе этих оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказываемая единственность решения и глобальную разрешимость задач. Для этого задачу (1)-(5) сведётся к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $u_x(t, x)$, $s(t)$. Обозначим $u_x(t, x) = v(t, x)$, тогда из задачи (1)-(5) получим

$$v_t(t, x) = a(t, x)v_{xx}(t, x) + a_x(t, x)v_x(t, x), \quad (t, x) \in D, \quad (6)$$

с начальными и граничными условиями

$$v(0, x) = \varphi'(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (7)$$

$$v(t, 0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$v(t, s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$\psi_2(t)\dot{s}(t) = \alpha a(t, 0)v_x(t, 0) - a(t, s(t))v_x(t, s(t)) + (1 - \alpha)F(u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Доказывается эквивалентность задач (1)-(5) и (6)-(10). На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи [6].

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Идеи. Методы. Примеры. - Москва: Наука, 1997. - 320 с.
2. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face // App.Math.and Com. 2006. - V.182, №5. pp.809-818.
3. Adrina C. Briozzo., Domingo A.Tarzia. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face// El.Jour.Differ.Eq.2006. V.2006, №21. - pp.1-16.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва. Высшая школа-1995, 301 с.
5. А.М. Нахушев. Нагруженные уравнения и их применение. Москва. Наука. 2012, 233 с.
6. Тахиров Ж.О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент: Наука, 2014. - 240 с.

Об одной нелокальной задаче со свободной границей типа Флорина для квазилинейного уравнения диффузии

Р.Н.Тураев

Ташкент, Институт Математики АНРУЗ

Нелокальные краевые, начально-краевые задачи представляют весьма интересное обобщение классических задач и в то же время они естественным образом получаются при построение математических моделей реальных процессов и явлений в физике, в инженерии, в социологии, в биологии, в экологии и т.д. [1].

Для различных типов квазилинейных параболических уравнений рассмотрен ряд задач со свободной границей типа Стефана с локальными граничными условиями (см., [2,3]). А нелокальные задачи типа Стефана и Флорина для квазилинейных уравнений почти не рассматривались [4].

В настоящей работе рассматривается нелокальная задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Требуется найти пару функций $s(t), u(t, x)$ такую, что непрерывно дифференцируемая $s(t)$ функция определена на отрезке $0 < t \leq T$, $s(0) = s_0 > 0, 0 < \dot{s}(t) \leq N$ а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a(t, x, u_x)u_{xx} + b(t, x, u_x)u_x + c(t, x, u_x), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \alpha u(t, x_0), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Исследования проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t), u(t, x)$ и их производные, а затем доказывается теорема единственности решения. Далее эта задача

сводится к задаче типа Стефана. Доказывается их эквивалентность. Для решения задачи типа Стефана устанавливается, априорные оценки и в итоге доказывается существование решения первоначальной задачи.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва. Высшая школа-1995, 301 с.
2. Fasano A., Primicerio M. Free boundary problem for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions // J. Math. Anal. Appl., 1979, v.72, p.247-273.
3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск, Наука, 1986, 240 с.
4. Джураев Т.Д., Тахиров Ж.О. Нелокальная задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения. ДАН РУз., 1998, No 1, С. 3-7.

УДК 519.95

Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 4D-модулярных динамических систем

Ф.Г. Фейзиев¹, М.Р. Мехтиева²

¹ Сумгаитский Государственный Университет,

² Бакинский Государственный Университет

e-mail: FezyiyevFG@mail.ru

Рассматривается следующая многомерная четырехпараметрическая модулярная динамическая система (4D-МДС) с памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, которая характеризуется следующим функциональным соотношением [1]

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = G\{u[\tau, c_1 + p_1, c_2 + p_2, c_3 + p_3] \mid n - n_0 \leq \tau \leq n, p_\alpha \in P_\alpha, \alpha = \overline{1,3}\}, GF(2). \quad (1)$$

Здесь $n \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $c_\alpha \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $\alpha = \overline{1,3}$; $y[n, c_1, c_2, c_3] \in GF(2)$ и $u[n, c_1, c_2, c_3] \in GF(2)$ являются выходной и входной последовательностями МДС соответственно;

$$P_\alpha = \{p_\alpha(1), \dots, p_\alpha(r_\alpha)\}, p_\alpha(1) < \dots < p_\alpha(r_\alpha), p_\alpha(j) \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}, j = 1, \dots, r_\alpha,$$

кроме того, $p_\alpha(1)$ и $p_\alpha(r_\alpha)$ конечные целые числа, где через $p_\alpha(j)$ обозначена j -ый элемент множества P_α ($\alpha = \overline{1,3}$). С помощью обозначения $c = (c_1, c_2, c_3)$ и $p = (p_1, p_2, p_3)$, где $p_\alpha \in P_\alpha, \alpha = \overline{1,3}$, соотношение (1) пишется в виде

$$y[n, c] = G\{u[\tau, c + p] | n - n_0 \leq \tau \leq n, p \in P\}, GF(2). \quad (2)$$

Пусть $r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ и через $p(j)$ обозначено j -ый элемент множества P ,

$$\Phi(i) = \{\bar{m} = (m_1, \dots, m_r) | m_\ell \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \ell = \overline{1, r}, \sum_{\alpha=1}^r m_\alpha = i\}, \quad (3)$$

$$Q(i, \bar{m}) = \{\alpha | m_\alpha \text{ есть компонента } \bar{m} \text{ и } m_\alpha \neq 0, \alpha = \overline{1, r}\}. \quad (4)$$

$$\Gamma(i, \bar{m}) = \prod_{\alpha \in Q(i, \bar{m})} \Gamma_1(m_\alpha), \quad (5)$$

$$\Gamma_1(m_\alpha) = \{\bar{\tau}_\alpha = (\tau(\alpha, 1), \dots, \tau(\alpha, m_\alpha)) | 0 \leq \tau(\alpha, 1) < \dots < \tau(\alpha, m_\alpha) \leq n_0\}, \quad (6)$$

для всех $\alpha \in Q(\bar{m}, i)$ из векторов $\bar{\tau}_\alpha$ образовано блочный вектор $\bar{\tau}$. Множество всех блочных

векторов (наборов) $\bar{\tau}$ суть множество $\Gamma(i, \bar{m})$.

Теорема 1. Пусть имеют место соотношения (3)-(6). Тогда полная реакция 4D-МДС с памятью n_0 и ограниченной связью P , характеризующая соотношением (2), может быть представлена в виде следующего двузначного аналога полинома Вольтерры:

$$y[n, c] = \sum_{i=0}^{(n_0+1)r} \sum_{\bar{m} \in \Phi(i)} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})} K_{i, \bar{m}}[\bar{\tau}] \prod_{\alpha \in Q(i, \bar{m})} \prod_{\eta_\alpha=1}^{m_\alpha} u[n - \tau(\alpha, \eta_\alpha), c + p(\alpha)], GF(2). \quad (7)$$

Для нахождения коэффициентов полинома (7) при известных значениях входной и выходной последовательности, $G\{\dots\}$ представляется в виде

$$G\{\dots\} = f(u[n - n_0, c + p(1)], u[n - n_0, c + p(2)], \dots, u[n - n_0, c + p(r)], \dots, u[n, c + p(r)]),$$

где $f(\dots)$ суть модулярной функции над коечным полем Галуа $GF(2)$. Ясно, что

$$K_0 = f(0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0), \quad K_{1, (1_\alpha)}[\tau] = K_0 + f(u[n - \tau, c + p(\alpha)] = 1), GF(2), \quad (8)$$

Здесь $\tau \in \{0, \dots, n_0\}$, $\alpha \in \{1, \dots, r\}$, $u[n - \tau, c + p(\alpha)]$ является единственной переменной из множества U , принимающей значение 1 и при этом значение функции $f(\dots)$

обозначено через $f(u[n - \tau, c + p(\alpha)] = 1)$, где

$U = \{u[n, c + p(1)], \dots, u[n, c + p(r)], \dots, u[n - n_0, c + p(r)]\}$; через (1_α) обозначен элемент $\bar{m} \in \Phi(1)$, в котором $m_\alpha = 1$, а остальные компоненты суть 0.

Теорема 2. Пусть: **1.** $\bar{m} \in \Phi(i)$, $i \in \{3, \dots, (n_0 + 1)r\}$; **2.** Ненулевые элементы набора \bar{m} есть m_α , где $\alpha \in Q(i, \bar{m}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\theta\}$ и $\theta \leq r$; **3.** Множества $\Gamma_1(m_{\alpha_\nu}), \nu = \overline{1, \theta}$, есть следующие множества $\Gamma_1(m_{\alpha_\nu}) = \{\bar{\tau}_\nu = (\tau(\nu, 1), \dots, \tau(\nu, m_{\alpha_\nu})) \mid 0 \leq \tau(\nu, 1) < \dots < \tau(\nu, m_{\alpha_\nu}) \leq n_0\}$; **4.** $\ell_\nu = m_{\alpha_\nu}$, $\nu = \overline{1, \theta}$; **5.** $u[n - \tau(\nu, \xi), c + p(\alpha_\nu)] = 1$, $\xi = \overline{1, \ell_\nu}$, $\nu = \overline{1, \theta}$, а остальные переменные из множества U принимают значения 0 и в этом случае значение функции $f_\nu(\dots)$ обозначено через $f(u[n - \tau(\nu, \xi), c + p(\alpha_\nu)] = 1 \mid \xi = \overline{1, \ell_\nu}, \nu = \overline{1, \theta})$. Тогда для коэффициента $K_{i, \bar{m}}[\bar{\tau}]$ полинома (7) справедлива следующая формула:

$$K_{i, \bar{m}}[\bar{\tau}] = f(u[n - \tau(\nu, \xi), c + p(\alpha_\nu)] = 1 \mid \xi = \overline{1, m_{\alpha_\nu}}, \nu = \overline{1, \theta}) + \\ + \sum_{\eta=0}^{i-1} \sum_{(b, \bar{\beta}, \bar{\rho}) \in F_1(\eta, \theta, \bar{\ell})} \sum_{\bar{\pi} \in \Omega_{b, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell})} K_{\eta, (\beta_{\sigma_{\rho_1}}, \dots, \beta_{\sigma_{\rho_b}})} [((\tau(\rho_1, \pi_{1,1}), \dots, \tau(\rho_1, \pi_{1, \beta_{\rho_1}})), \dots, \\ \dots, (\tau(\rho_b, \pi_{b,1}), \dots, \tau(\rho_b, \pi_{b, \beta_{\rho_b}})))] , GF(2). \quad (9)$$

Здесь

$$\bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_\theta), \quad N_b(\theta) = \{\bar{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_b) \mid 1 \leq \rho_1 < \dots < \rho_b \leq \theta\}, \\ F_1(\eta, \theta, \bar{\ell}) = \{(b, \bar{\beta}, \bar{\rho}) \mid 1 \leq b \leq \theta, \quad \bar{\beta} = (\beta_{\rho_1}, \dots, \beta_{\rho_b}), \quad 1 \leq \beta_{\rho_\alpha} \leq \ell_{\rho_\alpha}, \quad \nu = \overline{1, b}, \\ \bar{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_b) \in N_b(\theta), \quad \sum_{\nu=1}^b \beta_{\rho_\nu} = \eta\},$$

$$\Omega_{b, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell}) = \prod_{\nu=1}^b \Omega_{\beta_{\rho_\nu}}(\ell_{\rho_\nu}), \quad \Omega_{\beta_{\rho_\nu}}(\ell_{\rho_\nu}) = \{\bar{\pi}_\nu = (\pi_{\nu,1}, \dots, \pi_{\nu, \beta_{\rho_\nu}}) \mid 1 \leq \pi_{\nu,1} < \dots < \pi_{\nu, \beta_{\rho_\nu}} \leq \ell_{\rho_\nu}\}.$$

Формула (9) вместе с формулами (8) определяют рекуррентное соотношение для нахождения коэффициентов полинома (7) при известных значениях входных и выходных последовательностей.

Литература

1. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. Баку, Изд-во «Элм», 2006. - 234 с.

Дифференциально-разностные уравнения для некоторых семейств функция

А.Р.Хаиров

г. Махачкала, Дагестанский государственный университет

Рассматриваются дифференциально-разностные уравнения, аналитические решения которых определяются заданными начальными функциями. Затем путем подбора начальных функций получаются семейства функций и соответствующие дифференциально –разностные уравнения.

Тресдел ([1], с.246) изучил функции $F(x; \alpha)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d}{dx} F(x; \alpha) = F(x; \alpha + 1) \quad (1)$$

В связи с этим мы вводим в рассмотрение уравнения

$$\frac{d}{dx} y(x; \alpha) = \lambda y(x; \alpha + 1) \quad (2)$$

$$x \frac{d^2}{dx^2} U(x; \alpha) + \beta \frac{d}{dx} U(x; \alpha) = \lambda U(x; \alpha + \rho)$$

Поиск решения уравнения (2) в виде ряда

$$y(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha) x^n \quad (3)$$

приводит к соотношениям

$$C_{n+1}(\alpha) = \lambda \frac{C_n(\alpha + 1)}{n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

по которым находим

$$C_n(\alpha) = \lambda^n \frac{C_0(\alpha + n)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, решение уравнения (2) определяется заданием функции $C_0(\alpha) = \varphi(\alpha)$ с необходимыми свойствами.

Теорема. Если

$$\frac{1}{R(\alpha)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi(\alpha + n)|}{n!}} < +\infty,$$

то

$$y(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{\varphi(\alpha + n)}{n!} x^n \quad (|x| < R(\alpha)) \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению (2) и условию $y(0; \alpha) = \varphi(\alpha)$

При $\lambda = i$, $y(x; \alpha) = U(x; \alpha) + iV(x; \alpha)$ из (4) получим

$$\frac{d}{dx} U(x; \alpha) = -V(x; \alpha + 1),$$

$$\frac{d}{dx} V(x; \alpha) = U(x; \alpha + 1);$$

где

$$U(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi(\alpha + 2n)}{(2n)!} x^{2n}, \quad V(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi(\alpha + 2n + 1)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}.$$

В частности, если $\varphi(\alpha)$ имеет период 1, то

$$U(x; \alpha) = \varphi(\alpha) \cos x, \quad V(x; \alpha) = \varphi(\alpha) \sin x.$$

Рассмотрим теперь задачу: найти решение уравнения

$$x \frac{d^2}{dx^2} U(x; \alpha) + \beta \frac{d}{dx} U(x; \alpha) = \lambda U(x; \alpha + \rho), \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $U(0; \alpha) = \varphi(\alpha)$.

При соответствующих условиях на $\varphi(\alpha)$ задача (4) имеет решение

$$U(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{\varphi(\alpha + n\rho)}{n!(\beta)_n} x^n \quad (6)$$

При $\rho = 1$ функция (6) получается из функции (4) заменой x^n на $\frac{x^n}{(\beta)_n}$, то есть

$$U(x; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{\varphi(\alpha + n)}{n!(\beta)_n} x^n$$

является однопараметрическим преобразованием функции (4) с параметром β .

Напомним определение однопараметрического преобразования. Если в

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

заменим x^n на $\frac{x^n}{(\gamma)_n}$, то получим функцию [2]

$$f\left(\frac{x}{(a)_\bullet}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{(\gamma)_n},$$

которая называется однопараметрическим преобразованием функции $f(x)$ с параметром γ .

Отметим несколько частных случаев уравнения (5) и его решения (6).

1) При $\lambda = 1$, $\varphi(\alpha) = \Gamma(\alpha)$, $\rho = 1$ функция (6) принимает вид

$$U(x; \alpha) = \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n x^n}{n! (\beta)_n}$$

Эта функция при $\alpha = 1$ является однопараметрическим преобразованием ядра Коши $(1-x)^{-1}$ с параметром β .

Мы для функции

$$P(a) = \int_0^{\omega} e^{-x} x^{a-1} dx$$

которая определяется равенством

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$$

получили выражение

$$P(a) = \frac{\omega^n}{a} e^{-\omega} \left(1 - \frac{\omega}{(a+1)_\bullet}\right)^{-1}$$

через преобразованное ядро Коши.

Исторические сведения и другие подробности о функции $P(\alpha)$ имеются в [3].

2) При $\varphi(\alpha) = 1$ уравнение (5) и его решение (6) принимают вид

$$x \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \beta \frac{dU(x)}{dx} = \lambda U(x), \quad (7)$$

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{x^n}{n!(\beta)_n} = \exp \frac{\lambda x}{(\beta)}.$$

Функция (7) является однопараметрическим преобразованием функции $e^{\lambda x}$.

При $\beta = \nu + 1$, $\lambda = -\frac{1}{4}$ она выражается через функцию Бесселя первого рода порядка ν .

3) При $\varphi(\alpha) = \Gamma(\alpha)$, $\rho = 1$ из уравнения (5) и его решения (6) получаем

$$x^2 \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \beta \frac{dU(x)}{dx} = \lambda U(x; \alpha + 1)$$

$$U(x) = \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{(\alpha)_n}{n!(\beta)_n} x^n \quad (8)$$

Функция (8), при $\lambda = 1$ множителем $\Gamma(\alpha)$ отличается от вырожденной гипергеометрической функции.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе) – М.: Наука, 1967.
2. Хаиров Рагим А. Однопараметрическое и двухпараметрическое преобразования степенных рядов// Материалы международной конф. «Современные проблемы математики». - Махачкала, изд. ДГТУ, с. 100-103.
3. Эрмит Ш. Курс анализа. - Москва – Ленинград, 1936.

The radiation diffusion equation: Explicit analytical solutions by improved integral-balance method

Jordan Hristov

Department of Chemical Engineering

University of Chemical Technology and Metallurgy

1756 Sofia, 8 Kl. Ohridsky Blvd., Bulgaria, e-mail: jordan.hristov@mail.bg

Abstract

Approximate explicit analytical solutions of the radiation diffusion equation by applying the double integration technique of the integral-balance method have been developed. The method allows approximate closed form solutions to be developed. A problem with a step change of the surface temperature and two problems with time-dependent boundary conditions have been solved. The error minimization of the approximate solutions has been developed straightforwardly by minimization of the residual function of the governing equation.

1. Introduction

Heat wave behaviour of thermal diffusion due to radiation is a reasonable physical and mathematic interpretation of thermal energy transfer in a variety of applied problem related to astrophysical phenomena [1], plasma physics [2, 3], building insulation [4], etc. In general, this physical model assumes a diffusion approximation relating the local thermal flux at any point of the medium by the local gradient of the radiation energy density that is an approach known from the classical Fourier law. Following Smith [5] the one-dimensional energy transfer by radiation and absence of fluid motion is

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi = -\frac{4}{3K\rho} \frac{\partial \sigma T^4}{\partial x} \quad (1)$$

The presentation of the thermal flux density Φ as a gradient of the 4th power of the local temperature is an accordance with the Rosseland approximation [1,5,6] which is valid for thick, non- opaque media in absence of fluid motion [5,6,7,8, 9]

The diffusion equation (1) was solved for the first time by Barenblatt [10] by a self-similar solution and then refined by

Zeldovich and Raizer [11]. As commented by Smith [5] these early attempts, especially the report of Hammer and Rosen [14] repeated the idea of the Barenblatt but met problems in defining the shape of the spatial temperature distribution profile. At the same time as the Barenblatt solution appeared the study of Marshak [9] was carried out

(performed in 1944-1945 in Los Alamos Laboratory but published only in 1958 as it is especially mentioned in the publication) . The Marshak solution also tried to express the spatial temperature distribution as a series of parabolic profiles. We will especially consider this model in the article since the new method used applies a generalized parabolic profile. For further deep reading on the solutions related to radiation-diffusion equation we refer to [5,6,7,8] and the references therein.

The aim of the present work is to present an approximate closed form analytical solution allowing to estimate the penetration depth of the heat wave and the spatial temperature distribution applying an improved integral-balance approach [12,13] already successfully applied to nonlinear heat conduction problems modelled by degenerate parabolic equations (see further in the text).

2. The nonlinear heat radiation diffusion equation

In accordance with Smith [5] the internal energy e and Rosseland mean opacity K are approximated by power-law of temperature T and density ρ as

$$e = f \frac{T^\beta}{\rho^\mu}, \quad \frac{1}{K} = g \frac{T^\alpha}{\rho^\lambda} \quad (2)$$

where $f = 3.4 MJ/kg$ and $g = 1/7200 g/cm^2$ are dimensional constants (especially for the case of gold) [14]

The exponents α and β are positive constants and in accordance with [5] and [14] we have $\alpha = 1.5$ and $\beta = 1.6$. With the power-laws (2) the energy balance (1) yields the following diffusion equation

$$\frac{\partial T^\beta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T^{4+\alpha}}{\partial x^2}, \quad D = \frac{16\varepsilon}{\beta} \frac{g\sigma}{3f\rho^{2-\mu+\lambda}}, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{4+\alpha} \quad (3)$$

It noteworthy that the dimension of the diffusion coefficient D in (3) is $m^2/sK^{[4+\alpha-\beta]}$ and only in the case when $\alpha = 0$ and $\beta = 1$ we have $D \equiv [m^2/sK^3]$.

Smith [5] used the parameter $U = T^{4+\alpha-\beta}$ to transform (3) into a wave equation

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \left[\frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{U}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] \quad (4)$$

Equation (4) excludes the case $\varepsilon \neq 1$ corresponding to the linear diffusion model. The transformed equation (4) was solved by Smith [5] with a series approximation

$$U(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) z^i, \quad z = x_F - x \quad (5)$$

In the context of the Smith solution x_F defines the front of a heat wave beyond which the medium is undisturbed, i.e. $T=0$ for $x \geq x_F$ that is $U(0,t)=0$. To this point, we will stop considering the Smith solution but will refer to it in comments on results developed in this article.

3. Solution approach

3.1. Integral balance approach in brief

The integral-balance method used in this work is based on the concept that the diffusant (heat or mass) penetrates the undisturbed medium at a final depth $\delta(t)$ which evolves in time. Therefore, the common boundary conditions at infinity ($T(\infty)=0$ and $\partial T(\infty,t)/\partial x=0$) can be replaced by

$$T(\delta)=0 \text{ and } \frac{\partial T}{\partial x}(\delta)=0 \quad (6)$$

The conditions (6) define a sharp-front movement $\delta(t)$ of the boundary between disturbed and undisturbed medium. The position $\delta(t)$ is unknown and should be determined through the solution. When the classical heat diffusion problem is at issue and the thermal diffusivity is temperature-independent (i.e. $a = a_0 = \text{const.}$) [12,13,15]

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

The integration of eq.(7) over a finite penetration depth δ and applying the Leibniz rule for differentiation under the integral sign results in (8)

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta} T(x,t) dx = -a_0 \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) \quad (8)$$

or equivalently as

$$\int_0^x \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx + \int_x^{\delta} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx = -a_0 \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) \quad (9)$$

Physically, eq.(8), as well as (9) imply that the total thermal energy accumulated into the finite layer (from $x=0$ to $x=\delta$) is balanced by the heat flux at the interface $x=0$. Equations (8) and (9) are the principle relationships of the simplest version of

the integral-balance method known as *Heat-balance Integral Method (HBIM)* [16]. After this first step, replacing T by an assumed profile T_a (expressed as a function of the relative space co-ordinate x/δ), then the integration in (8) results in an ordinary differential equation about $\delta(t)$ [12,13,16,17]. The principle drawback of (8) is that the right-side depends on gradient expressed through the type of the assumed profile.

An improvement, avoiding the drawback of HBIM is the double integration method (**DIM**) [12,13]. The first step of DIM is integration of from 0 to x , namely

$$\int_0^x \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx = a_0 \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - a_0 \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \quad (10)$$

Subtracting (10) from (9) we get

$$\int_x^\delta \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dx = a_0 \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (11)$$

Equation (11) has the same physical meaning as eq. (8). The integration of (11) from 0 to δ results in

$$\int_0^\delta \left(\int_x^\delta \frac{\partial T}{\partial t} dx \right) dx = a_0 T(0,t) \quad (12)$$

The integral relation (12) allows to work with either integer-order time-derivatives (as in the present case) or with time-fractional derivatives [19] where the Leibniz rule is inapplicable

If the thermal diffusivity is non-linear and expressed as a power-law $a = a_p T^m$ ($m > 0$), corresponding to degenerate diffusion problems) then equation (12) takes the forms [12,13]

$$\int_0^\delta \left(\int_x^\delta \frac{\partial T}{\partial t} dx \right) dx = \frac{a_p}{m+1} [T(0,t)]^{m+1} \quad (13)$$

The integral relation (13) will be used further in this work in the solutions of the problems at issue.

3.2. Transformation of the governing equation and degenerate diffusion equation

Here, following the notations of Smith [5] in section 2 and denoting $\theta = T^\beta$ which leads to $T = \theta^{1/\beta}$ and $T^{4+\alpha} = \theta^{(4+\alpha)/\beta}$. Now, we can present (3) as

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta^w}{\partial x^2}, \quad w = \frac{4 + \alpha}{\beta} \quad (14)$$

From (14) it is obvious that $\varepsilon = 1/w$ defined in (3). From the defined values of α and β we have that $w > 1$. Equation (14) can be presented as [12]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_w \theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right], \quad \theta^m \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{m+1} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial x} \quad (15)$$

where $D_w = wD$ and $m = w - 1 > 0$

The transformed equation (15) allows direct application of the Double-Integral Method, as it is demonstrated next. This is a classical example of the so-called *slow diffusion models* [19,20] which degenerates at $\theta = 0$, that is at the front of the moving solution. A change of variables $\varphi = \theta^m$ and $\tau = t/m$ allows eq. (15) to be expressed as

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = D_w \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + m \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] \quad (16)$$

Equation (16) has the same structure as (4) solved by Smith [5] and reveals a superposition of non-linear wave propagation and diffusion; it was successfully solved by HBIM in [15].

4. DIM solutions: constant density cases

4.1. Step change of temperature at the boundary

This example only demonstrates the technique of DIM applicable to the radiation diffusion equation and how the approximate profile should be determined. For the sake of simplicity a Dirichlet (a step change in the boundary condition at $x=0$) is considered to equation (15).

The application of DIM to (15) yields the following integral relations (equivalent) to (13), namely

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta} \int_x^{\delta} \theta(x,t) dx dx = D_w \frac{\theta^m(0,t)}{m+1}, \quad (17)$$

For Dirichlet boundary condition $T_s = const.$ we have $\theta_s = \theta(0,t) = T_s^\beta = const.$ The DIM solution assumes an approximate profile as parabolic one with unspecified

exponent $\theta = \theta_s (1 - x/\delta)^n$ which satisfies the boundary conditions (6) for any positive value of the exponent n [12, 21]. Applying DIM we get

$$\delta_{D_w(DIM)} = \sqrt{D_w t} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{m+1}} \quad (18)$$

Then, the normalized approximate solution is [12].

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_s} = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{D_w t} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{m+1}}} \right)^n \quad (19)$$

Thus defining the Boltzmann similarity variable $\eta_D = x/\sqrt{D_w t}$. With the inverse change of variables $T = \theta^{1/\beta}$ and $T_s = \theta_s^{1/\beta}$ we get

$$T_{norm} = \frac{T}{T_s} = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{D_w t} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{m+1}}} \right)^{\frac{n}{\beta}} \quad (20)$$

As it was established in [12], the exponent n of the solution (19) follows the rule $n = 1/m$ and therefore, the profile (20) has an exponent $1/m\beta$. Consequently with $m = w - 1 = 4 - 1 = 3$, and $\beta = 1.6$ we have $1/m\beta \approx 0.208$ and the normalized solution is

$$T_{norm} = \left(1 - \frac{\eta_D}{\sqrt{\frac{1+2m}{m^2(m+1)}}} \right)^{\frac{1}{m\beta}} = \left(1 - \frac{\eta_D}{0.440} \right)^{0.208} \quad (21a,b)$$

Hence, for $\eta_D = x/\sqrt{D_w t} = 0.440$ we have $T_{norm} = 0$ and this point defines the front of the heat wave.

Even though, HBIM and DIM are not self-similar method of solution, the benefits of their application is the definition of the dimensionless space coordinate x/δ allowing to determine straightforwardly the desired similarity variable without preliminarily scaling of the modelling equation. This approach will be demonstrated effectively in the examples solved in the next points.

4.2. Temperature-independent properties with time-dependent boundary condition (Marshak's problem)

4.2.1. Marshak's approach

Following Marshak [9], when the material density does not vary and the medium just heat up, the equation takes the form (in the original notations) resembling (14)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D_M}{(p+4)} \frac{\partial^2 T^{4+p}}{\partial x^2}, D_M = \frac{4cl_0}{3} \quad (22)$$

The pseudo-diffusion coefficient D_M has a dimension m^3/sK^{3+p} as it was demonstrated in eq. (3). Marshak [9] considered time-dependent boundary condition: $T_s = J_0 \exp(2\alpha_s t)$, $x=0$, where J_0 is the initial surface temperature at $t=0$ and α_s is a time constant. The solution was developed as a series $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} A(1-z/z_0)^i$, with the ansatzes (23).

$$f(z) = A \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{p+3}}, A = \frac{1}{J_0} \frac{(p+3)}{2L_0} z_0, z_0 = \frac{2L_0}{(p+3)} J_0^{\left(\frac{p+3}{2}\right)}, L_0 = \sqrt{\frac{cl_0}{3\alpha_s}} = 2\sqrt{D_M} \quad (23)$$

Here z_0 defines the front of the thermal wave. Marshak detected that only one term is enough to assure approximation error of 1.2%, if $p=3$. Hence, with $p=3$ assumed by Marshak we have $1/(p+3) = 1/6 \approx 0.166$, $A = 3z_0/J_0L_0$, $z_0 = J_0^3L_0/3$ and the normalized solution of Marshak is

$$\frac{f(z)}{A} = \frac{f(z)}{3z_0/J_0L_0} = \left(1 - \frac{z}{J_0^3L_0/3}\right)^{0.166} \quad (24)$$

4.2.2. DIM solution

The application of DIM (13) to (22) with $T_a = T_s(1-x/\delta)^n$, with $T_s = T_s(t)$ yields

$$\frac{d[J_0 \exp(2\alpha_s t) \delta^2]}{dt} = D_M N(n, p) [J_0 \exp(2\alpha_s t)]^{4+p}, N(n, p) = \frac{(n+1)(n+2)}{(p+4)} \quad (25)$$

From (25) with $\delta(t=0) = 0$ we have

$$\delta = \sqrt{\frac{D_M}{\alpha_s} J_0^{3+p} e^{2\alpha_s t(3+p)}} \sqrt{\frac{N(n, p)}{2(4+p)}} \quad (26)$$

The product $D_M J_0^{3+p} / \alpha_s$ has a dimension $[m^2]$ and therefore the ratio $x / \sqrt{(D_M / \alpha_s) J_0^{3+p}}$ is dimensionless. Hence, the normalized approximate solution is

$$\frac{T_a(x,t)}{J_0 e^{2\alpha_s t}} = \left(1 - \frac{\eta_M}{\sqrt{N(n,p)/2}} \right)^n \quad (27)$$

$$\eta_M = \frac{x}{\sqrt{\frac{D_M}{\alpha_s} J_0^{3+p} e^{2\alpha_s t(3+p)}}} \quad (28)$$

This solution defines the similarity variable η_M (28), while the denominator of (27) defines numerically the penetration depth.

The residual function of (22) is a measure of the error of approximation when the approximate solution is used. Following the methodology used in [12,13] we have

$$R = \left(\frac{x}{\delta} \right) \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} n \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^{n-1} - \frac{D_M 4n(4n-1)}{\delta^2} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^{4n-2} \quad (29)$$

If R should be zero at the interface $x=0$, satisfying eq.(22), then from (29) it follows that $4n-1=0 \rightarrow n=1/4$. Otherwise, the requirement $R(0,t) > 0$ should be satisfied if $n < 1/4$. At the front of the thermal layer when $x \rightarrow \delta$, the last term of (29) tells us that the condition $4n-2 > 0 \rightarrow n > 1/2$ should be obeyed. However, the first condition established at $x=0$ is more important since it allows determining the flux at the boundary. Moreover R can be presented as $R = r(z,t) / \delta^2$ [12], where with $z = x/\delta$ we may present the expanding in time thermal layer as a fixed boundary domain since $0 \leq z \leq 1$. Hence, $r(z,t)$ is

$$r(z,t) = z \frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dt} n (1-z)^{n-1} - D_M 4n(4n-1) (1-z)^{4n-2} \quad (30)$$

Then, the mean squared error of approximation over the thermal layer is δ (i.e. from $z=0$ to $z=1$) is

$$E(z,t) = \int_0^1 [R(z,t)]^2 dz = \frac{1}{\delta^4} \int_0^1 [r(z,t)]^2 dz \quad (31)$$

Since, $E(z,t)$ decays in time with a speed proportional to $1/\delta^4$ it is important to minimize it at the beginning of the diffusion process. Then, following Myers [22] and setting $t=0$ in all time-dependent terms we get

$$E(z,0) = \frac{[4n(4n-1)]^2}{8n-1} \quad (32)$$

Hence, we get a minimal error of approximation at $t=0$ for $n=1/4$ which coincides with the value established earlier at $x=0$. Moreover, from the denominator of $E(z,0)$ it follows that $n > 1/8$, a condition satisfied by $n=1/4$. However, this exponent is not the exact one [22]. Moreover, as it was reported in [14] the profile $T \approx T_s (1-x/x_F)^{1/4}$ is the solution of the steady-state equation $\partial^2 T^4 / \partial x^2 = 0$, with x_F is the optical depth to the heat front.

Now, we recall that eq. (22) can be presented as

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_M T^q \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad q = 3 + p \quad (33)$$

This is a well-known degenerate diffusion equation [19, 20, 21]. As it was established in [12, 15] and mentioned in the preceding example, the exponent of the approximate profile can be approximated as $n \approx 1/q$. Then, with $n = 1/(p+3)$ we have $N(n, p) = 2$ and $\sqrt{N(n, p)}/2 = 1$. Then, the normalized approximate profile is

$$\frac{T_a(x,t)}{J_0 e^{-2\alpha_s t}} \approx (1 - \eta_M)^{\frac{1}{p+3}} \quad (34)$$

Hence, $\eta_M = 1$ defines the front of the thermal layer, that in dimensional form is

$$x_\delta = \sqrt{\frac{D_M}{\alpha_s} J_0^{3+p} e^{2\alpha_s t(3+p)}} \quad (35)$$

The penetration depth z_0 in the solution of Marshak is defined through the surface temperature by $J_0^{(3+p)/2}$ and this confirms qualitatively the DIM solution where $\delta \equiv J_0^{(3+p)/2}$. In most of cases the value of p is stipulated through the scaling exponents α and β in the approximations such as (2). The Marshak exponent $n = 0.166$ satisfies the condition $1/8 < n_M = 0.166 < 1/4$. The exponent $n = 1/4$ corresponds to $n = 1/(p+3)$ for $p = 1$ and this

provides $\sqrt{N(n, p)} = 1$. Moreover, from (22) we get $T^{4+p} \approx T^5$. With $\beta = 1$ in (22) which is equivalent to (14) we have $w = (4 + \alpha)/\beta \approx 5.5$ and a scaling $T^w \approx T^{5.5}$.

Therefore, due to different formulations of the similarity variables and different solution techniques we got different exponents of the approximating parabolic profile. In this context, the method determining the exponent through minimization of the means-squared error of approximation is reliable [12, 13,22] and we accept $1/8 < n_{opt} < 1/4$ for the DIM solution. Numerical tests with $E(z, t)$ varying n in the above defined range provided $n_{opt} \approx 0.153$ with $E(z, t) \approx 0.00245$.

The functional relationship of the similarity variables η_M (28) and x_δ (35) but the numerical factors are different. In order to compare the DIM solution to this of Marshak we present them in a fixed boundary range $0 \leq z \leq 1$ with $z = x/\delta = x/x_\delta$. The plots on Fig.1a reveal that the present DIM solution with the optimal exponent is quite close to the Marshak solution. The use of the limit values of exponent $n = 1/4$ and $n = 1/8$ leads to unacceptable pointwise errors when compared to the Marshak solution while with $n_{opt} = 0.153$ we may reach error less than 0.02 as it is illustrated by the plots in shown Fig.1b . All solutions demonstrate large errors near the steep front where the gradient tends to be infinite, but we know that this is inherent for integral-balance solutions of degenerate parabolic equation [12,13].

4.3. Temperature-dependent properties and time-dependent boundary power-law condition (Garnier's problem)

4.3.1 Garnier approach

Garnier et al. [8] considered the same postulation of the problem as in [5] (see eq. (2) and eq.(3)) and by change of variable $\xi = T^{4+\alpha}$ transformed eq.(1) into

$$\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial t} = D_G \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, D_G = \frac{16}{12 + 3\alpha} \frac{g\sigma}{\rho_0^{2-\mu+\lambda}}, \varepsilon = \frac{\beta}{4 + \alpha} \quad (36)$$

if the scaling laws (2) are valid with $\alpha = 1.5$, $\beta = 1.6$, $\lambda = 0.2$ and $\mu = 0.14$.

Following Garnier et al. [8] the solution developed requires $2\beta < 4 + \alpha$, thus assuring $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Garnier et al. [8] accepted the finite depth $\delta(t)$ concept of the heat

wave propagation with the condition $\xi(\delta) = \partial\xi(\delta)/\partial x = 0$. With a power law surface temperature $T_s(t) = T_{s0}(t/t_s)^k$, where k is a given exponent and t_s is a time scale, the validity of the solution Garnier et al. [8] imposed the condition $-1/(4+\alpha-\beta) < k < 1/(4+\alpha-2\beta)$. This approach looked for a self similar solution with ansatzes

$$\xi(x,t) = \xi_s(t)\xi(x/\delta), \quad \xi_s(t) = T_{s0}^{4+\alpha}(t/t_s)^{q_0}, \quad \delta = \delta_0(t/t_s)^{n_G}, \quad q_0 = \frac{4+\alpha}{k}, \quad \delta_0 = \sqrt{\Gamma D_G} \sqrt{T_{s0}^{4+\alpha}} \quad (37)$$

where Γ is a dimensionless parameter that parameterizes the differential equation about ξ .

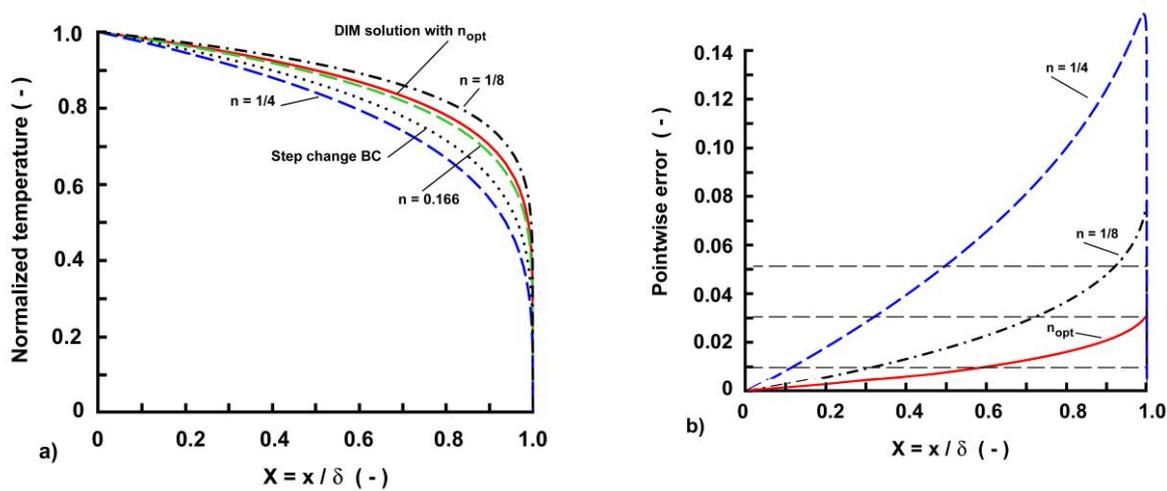


Fig. 1. Comparison of the approximate DIM solutions with the solution of Marshak. a) Normalized temperature profiles; b) Pointwise errors $|Y_{Marshak} - Y_{DIM}|$, where Y denote the normalized temperature (see eq.(27) and eq.(34)). **Note:** The dotted line presents the DIM solution of example 4.1 with a step change in the boundary condition. The horizontal dashed lines mark 3 levels of pointwise error: 0.01, 0.03 and 0.05.

After substitution of (37) in (36) Garnier et al. [8] established that the exponent n_G should be $n_G = [1+k(4+\alpha-\beta)]/2$. Further, the solution was considered as an eigenvalue problem defining the eigenvalue-eigenfunction (Γ, ξ) depending only on the values of α, β and k . At this moment we stop the analysis of the solution of Garnier et al. [8] since it requires a numerical approach in contrast to the analytical DIM technique applied next.

4.3.2. DIM solution

The change of the variable as $\theta = \xi^\varepsilon = T^{4+\alpha}$ (as it was done in 3.2) transforms equation (36) as

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_G \frac{\partial^2 \theta^w}{\partial x^2}, \quad w = \frac{4+\alpha}{\beta} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (38)$$

which is equivalent to eq.(14)

With an assumed profile $\theta = \theta_s (1-x/\delta)^n$ and the DIM integral relationship (15) we get

$$\delta^2 = D_G \frac{N(n, w)}{kw+1} \frac{T_{s0}^{w-1}}{a_{ts}} t^{k(w-1)+1}, \quad N(n, w) = \frac{(n+1)(n+2)}{w}, \quad (t_s)^{kw-1} = a_{ts} = \text{const.} \quad (39)$$

Hence, the penetration depth is

$$\delta_H = \sqrt{D_G T_{s0}^{(w-1)} t^{n_H}} \sqrt{\frac{N(n, w)}{a_{ts}}} \quad (40)$$

$$n_H = k \frac{4+\alpha-\beta}{\beta} + 1 = k(w-1) + 1 \quad (41)$$

The DIM solution provides $\delta \equiv t^{n_H/2}$ and that $(n_H - 1) = (n_G - 1)/\beta$. With $\alpha = 1.5$ and $\beta = 1.6$ we have $\delta_H \equiv t^{1/2+1.218k}$, while $\delta_G \equiv t^{1/2+1.95k}$. For $k=0$ both, δ_H and δ_G scale to \sqrt{t} . Further, with the inverse transforms $T = \theta^{1/(4+\alpha)}$ the approximate solution $T_a(x, t)$ is

$$T_a(x, t) = T_{s0} \left(\frac{t}{t_s} \right)^k \left(1 - \frac{x}{\delta_H} \right)^q, \quad q = \frac{n}{4+\alpha} \quad (42)$$

The definition the residual function R_H of eq.(38), carried out in a manner already demonstrated in section 4.2.2, reveals that q should satisfy the condition $n > 1/w$ and it is independent of k because the product $t^{-(w-1)k} \delta (d\delta/dt)$ emerging in expression of R_H is time-independent. Then, the restriction on the exponent in (42) is $q > \beta/(4+\alpha)$. If we suggest $q = \beta/(4+\alpha)$, then in (42) we should have $n = \beta > 1$ which should provide an unphysical concave temperature profile of (39) as it was proved in[12,13]. However, with the prescribed values of α and β we have $w \approx 3.437$ or $m = w-1 = 2.437$.

The optimization of the residual function with respect to q provides that for $m=2$ we have $q_{opt} \approx 0.666$, while for $m=3$ we have $q_{opt} \approx 0.640$. Now, from $q_{opt} = n_{opt}/(4+\alpha)$ we

$n_{opt}(m=2) \approx 3.663$ and $n_{opt}(m=2) \approx 3.520$. Precisely, for $m=2.437$ we get $q_{opt(m=2.437)} \approx 0.636$ and consequently $n_{opt(m=2.437)} \approx 3.501$. Alternatively, if we suggest that the exponent q could be expressed $q_a(4+\alpha)$ it is easy to see that from the above established values about q_{opt} we have $q_{a(m=2)} \approx 0.666$ and $q_{a(m=3)} \approx 0.640$, while $q_{a(m=2.437)} \approx 0.649$.

With these estimates, the normalized temperature profile is

$$\frac{T_a(x,t)}{T_{s0}(t/t_s)^k} \approx \left(1 - \frac{\eta_H}{[2.684/a_s(1+4.347k)]} \right)^{0.649} \quad (43)$$

where $\eta_H = x/\sqrt{D_G T_{s0}^{n_H/2} t^{n_H}}$ is the similarity variable.

The flux approximate profile follows directly from the definitions (1) and (36) and the solution (43) as

$$\Phi_a(x,t) = D_G \left[T_{s0} \left(\frac{t}{t_s} \right)^k \right]^4 \frac{4q}{\delta_H} \left(1 - \frac{x}{\delta_H} \right)^{4q-1} \quad (44)$$

Mean while the approximated surface flux $\Phi_a = -D_G [\partial T_a^4(0,t)/\partial x]$ is $\Phi_a = [T_{s0}(t/t_s)^k]^4 (4q/\delta_H)$ or in normalized form as $\Phi_a/[T_{s0}(t/t_s)^k]^4 = (4q/\delta_H)$. From the results (40) and (41) it follows that

$$\Phi_a/[T_{s0}(t/t_s)^k]^4 \equiv q^4 t^{-\frac{1}{2} \left[k \frac{4+\alpha-\beta}{\beta} + 1 \right]} \equiv q^4 t^{-\frac{1}{2} + 1.95k} \quad (45)$$

The normalized DIM solution DIM solution (43) as a function of the similarity variable n_H is shown in Fig. 2.

The condition of increasing surface flux when the surface temperature is prescribed as increasing power-law function of time follows from (45) and the requirement is $k < 7\beta/(4+\alpha-\beta) \approx 2.871$. Hence with linear or quadratic ramp of surface temperature the surface flux will increase in time. Moreover, the normalized flux follows from (44) as

$$\frac{\Phi_a(x,t)}{D_G [T_{s0}(t/t_s)^k]^4 4q/\delta_H} = \left(1 - \frac{x}{\delta_H} \right)^{4q-1} \quad (46)$$

This expression allows the present results to be compared at least qualitatively with the

numerical solutions in [8]. For optimal $q_{a(m=2.437)} \approx 0.636$ we have $4q-1 \approx 1.544 > 1$. With such an exponent the parabolic profile (46) generates concave distributions (see Fig.2) in contrast to temperature profiles which are convex.

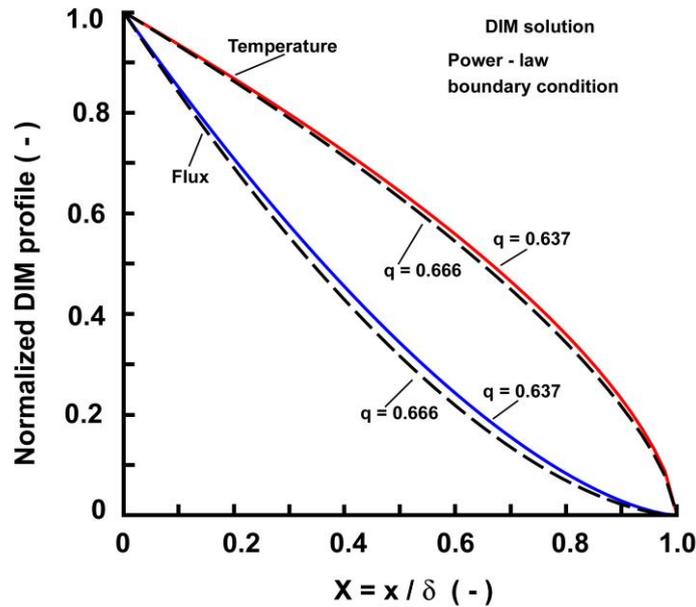


Fig. 2. DIM solutions as normalized profiles of both the temperature and the heat flux with power-law time-dependent boundary condition

The approximate DIM temperature profile and the results of Garnier et al. [8] (numerical solutions) are hard to be compared due to incompatibility of the methods used. However, we have to mention that the developed DIM solution confirms the numerical results of Garnier et al., especially the profile in Fig.4 in [8], when the isothermal thermal shock condition were simulated. To be precise, all examples discussed here are within the limit of the isothermal thermal shock as in the first postulation of Marshak [9]. Other regimes discussed in [8] such as subsonic waves and the ablation problem are out of the scope of the present work.

3. Conclusions

This work demonstrated the efficiency of the double-integration version of the integral-balance method to solve the radiation diffusion equation. It was confirmed that this equation can be easily presented as a degenerate parabolic equation. Then, the technique developed in [12] was efficiently applied to find explicit approximate and closed form solutions. The main difference between the solutions of Marshak and

Garnier commented here and the DIM solutions are that in the former studies ansatzes about the penetration depth are used, while DIM defines it as a step of the solution. The second important step in the present solution is the optimization procedure defining the optimal exponent of the parabolic profile [12]. This step, in fact, is application of the least squares method [23] since the entire function of the assumed parabolic profile is completely defined after determination of the penetration depth. Such procedure is not included in the previous solutions commented here.

References

- [1] S. Rosseland, *Astrophysik und atom-theretische Grundlagen*, Springer-Verlag, Berlin (1931).
- [2] Lonngren KE, Ames WF, Hirose A, Thomas J, Field penetration into plasma with nonlinear conductivity. *The Physics of Fluids*, 17(10)(1974) 1919-1920
- [3] P. Broadbridge, M.M. Lavrentiev, and G.H. Williams, Non-linear heat conduction through externally heated radiant plasma: Background analysis for numerical study, *J. Math Anal. Appl.*, 238 (2) (1999), 353-368.
- [4] A.Tilloua, L.Liberssart, A.Joulin, B. Monod and G. Jeandel, Dtermination of physical properties of fibrous thermal insulation, *EPJ Web of Confernces*, 33, 02009 (2012, doi:10.1051/epjconf/20123302009).
- [5]C.C. Smith, Solutions of the radiation diffusion equation, *High Enrgy Density Physics*, 6 (1) (2010) 48-56.
- [6] J.-F Clourt, The Rosselnd approximation for radiative transfer problems in heterogeneous media, *J. Quant.Specrosc. Radiat. Transfer*, 58(1) (1997) 33-43.
- [7] E.Magyari, A. Pantokratoras, Note on the effect of thermal radiation in linearized Rosseland approximation on heat transfer in various boundary layer flows, *Int.Comm.Heat Mass Transfer*, 38(5) (2011) 554-556.
- [8] J. Garnier, G.Malinie, Y.Saillard and C.Cherfis-Clerouin, Self-similar solution for non-linear radiation diffusion equation, *Phys. Plasmas*, 13 (9) (2006) doi:10.1063/1.2350167

- [9] R.E. Marshak, Effect of Radiation on shock wave behaviour, *The Physics of Fluids*, 1(1)(1958) 24-29 .
- [10] G.I. Barenblatt, On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium., *App. Math Mech.* 16 (1) (1952) 67-78
- [11] Ya. B. Zeldovitch and Yu.O. Raizer, *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena* , Academic, New York (1966)
- [12] J.Hristov , Integral solutions to transient nonlinear heat (mass) diffusion with a power-law diffusivity: a semi-infinite medium with fixed boundary conditions, *Heat Mass Transfer*, 52 (3) (2016) , 635-655,
- [13] A.Fabre and J. Hristov, On the integral-balance approach to the transient heat conduction with linearly temperature-dependent thermal diffusivity, *Heat Mass Transfer*, 53 (1 2017) 177–204.
- [14] J. H. Hammer and M.D. Rosen, A consistent approach to solving the radiation diffusion equation, *Phys. Plasmas* 10, 1829 (2003); doi: 10.1063/1.1564599
- [15] J. Hristov J., An Approximate Analytical (Integral-Balance) Solution to A Nonlinear Heat Diffusion Equation, *Thermal Science*, 19(2) (2015), pp. 723-733
- [16] T.R.Goodman, Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer, *Advances in Heat Transfer*, T. F. Irvine and J. P. Hartnett, eds., 1 (1964), Academic Press, San Diego, CA, pp. 51–122.
- [17] J.Hristov, The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: *Analysis and Benchmark Exercises*, *Thermal Science*, 13 (2) (2009) 27-48.
- [18] J. Hristov, Approximate solutions to time-fractional models by integral balance approach, Chapter 5, In: *Fractional Dynamics* , C. Cattani, H.M. Srivastava, Xia-Jun Yang, (eds), De Gruyter Open, 2015 , pp.78-109.
- [19] J.M.Hill, Similarity solutions for nonlinear diffusion- a new integration procedure, *J. Eng, Math*, 23(1) (1989) 141-155.
- [20] S.N.Prasad, and H.B.Salomon, J.B., A new method for analytical solution of a degenerate diffusion equation, *Adv. Water Research*, 28 (10) (2005) 1091-1101.

- [21] Aronson, D.G., *The porous medium equation*, in *Nonlinear Diffusion Problems*, Lecture Notes in Math. 1224, A. Fasano and M. Primicerio, eds., Springer, Berlin, 1986, pp. 1–46.
- [22] T.G.Myers, Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods. *Int Comm Heat Mass Transfer* 36 (2) (2009)143-147
- [23] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, 3rd Edition, Academic Press, USA (1997).

УДК 514.11, 511.2

**Разрешение методико-математических вопросов с помощью принципа
ограничений**

И.М. Челябинов, С.Н. Мутова

Махачкала, Дагестанский государственный университет

Впервые роль ограничения-принципа при разрешении методико-математических вопросов бы внесен П.К. Магомедбековым [1]. Ряд работ посвящен рассмотрению ограничения не только как средства, но и как принципа [2, 3].

Решение задач с ограничениями в выборе средств вызывает у учащихся большой интерес, активизирует их, благотворно отражается на развитии творческих способностей. Надо заметить, что такая работа способствует росту самого учителя. Задаваясь каким-либо ограничением, мы ясно должны представлять цель, ради которой это ограничение вводится.

Одна и та же задача может решаться средствами элементарной геометрии, тригонометрии, аналитической геометрии, проективной геометрии и др. Задача из курса арифметики может быть решена средствами алгебры. Иногда бывает весьма целесообразно сузить круг средств, т. е. запретить ученику временно пользоваться некоторыми из известных ему средств. Учащийся, поставленный в такие ограничительные условия, старается найти выход из создавшегося положения и поэтому вынужден работать творчески.

Опыт показывает, что таких простых задач, допускающих вариантность поисков решения, более чем достаточно.

Приведем варианты решений одной задачи из геометрии, для учащихся 7-8-х классов

Задача №1. Построить несколькими способами равносторонний треугольник по данной его высоте h .

Приведенные нами примеры еще раз подтверждает мысль о том, что целенаправленные ограничения в выборе средств дают возможность в большей мере извлечь пользу из изучаемого теоретического материала, значительно расширяя аппарат приемов решения.

Правильное разрешение этой проблемы позволит получить ответ на такой важный вопрос методики преподавания математики, как умелое проведение подготовительной работы по наведению учащихся на открытие новых закономерностей, по воспитанию у них потребности в изучении последующих теорем курса.

Литература

1. Магомедбеков П.К. Очерки преподавания геометрии в школе.- Махачкала: Дагучпедгиз.-1970.-195с.
2. Челябинов И.М. Разработка системы организации исследовательской работы учащихся в процессе изучения факультатива 7-11 классов. Дисс...канд.пед.наук.-Махачкала.-1999.-178с.
3. Челябинов И.М., Мутова С.Н. Ограничение как принцип методики математики./Материал Всероссийской научно- практической конференции «Теория и практика применения математического моделирования и информационных технологий в науке, технике и образовании», - Москва, МГОУ.- 2010.

УДК 519.17

Кс-грамматика предложений на ЕЯ

Ш. Б. Шихиев¹, Ф.М. Раджабова²

Махачкала, Дагестанский государственный университет

e-mail: Shshb51@mail.ru¹

e-mail: Fatima_makh@mail.ru²

Введение. Формальные грамматики и языки хорошо изучены, однако желание построить грамматику ЕЯ в форме порождающих грамматик наталкивается на кажущиеся структурные различия между *словом* в формальных языках и *предложением* в ЕЯ. Ибо *слово* есть любая конечная последовательность символов алфавита, а *предложение* является двумерной древовидной структурой. Например, следующее предложение

Холодная вода речки льется свежей струей (1)

имеет древовидную структуру (*корневое дерево* ([2]), Рис.1).

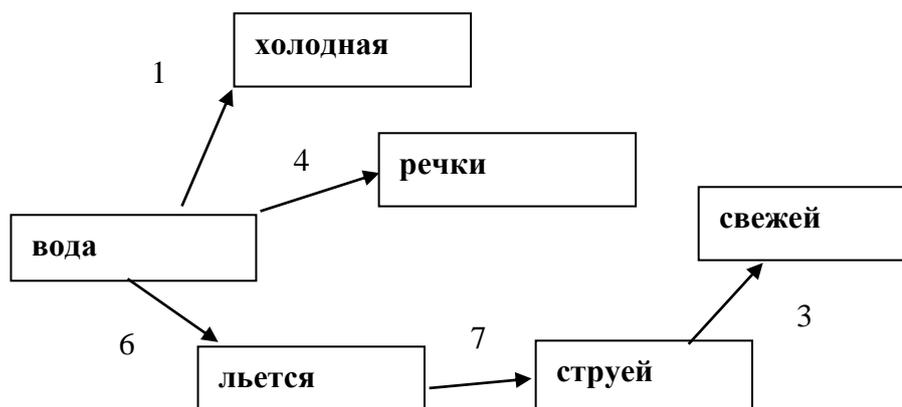


Рис. 1. Дерево в графе G.

Грамматика, порождающая предложение. Корневое дерево, как известно, представимо в виде строки, которая называется *скобочной записью* дерева. Например, предложение из Рис. 1 может быть представлено в следующей форме

вода(холодная, речки, льется(струей(свежей))) (2)

Попытаемся выписать подстановки (правила грамматик), порождающие предложение (2). Нетерминальными символами будут слова из (2). В качестве терминальных символов будут использованы слова в угловых скобках.

1. <существительное1> → **вода**,
2. <существительное2> → **речки**,
3. <существительное3> → **струей**,
4. <прилагательное1> → **холодная**,
5. <прилагательное2> → **свежей**,
6. <глагол> → **льется**,
7. <дополнение1> → (<существительное3>, <прилагательное2>),
8. <сказуемое> → (<глагол>, <дополнение1>),
9. <подлежащее> → <существительное1>,
10. <предложение> → <подлежащее> (<прилагательное1>, <существительное2>, <сказуемое>)

Нетрудно проверить, что правила 1 – 10 порождают предложение (2). Мы имеем грамматику одного предложения. Теперь попытаемся преобразовать правила 1 – 10 таким образом, чтобы они порождали предложения, имеющие такую же *синтаксическую форму*, как (2).

Синтаксическая форма предложения. Исключительно для простоты изложения и понимания сути проблемы рассмотрим пример с урезанной грамматикой русского языка. Предположим, что в рассматриваемой грамматике всего три части речи: имя существительное (ИС), имя прилагательное (ИП) и глагол; каждая имеет свой уникальный код: 01, 02 и 07, соответственно. Имеется одна категория падежа с тремя падежами: именительный, родительный и творительный. Три падежа – эти три морфологических оператора, сосредоточенные в категории падежа с кодом 30: $30 = (31, 32, 35)$. (Все имена женского рода и единственного числа, а глагол имеет форму настоящего времени, единственного числа и третьего лица)

Три падежных оператора порождают новые формы имен, которые распределены по *шестилексическим группам* с кодами:

$$0131, 0132, 0135, 0231, 0232, 0235 \quad (3)$$

В коде лексической группы первые две цифры – код части речи, вторые две цифры – код оператора. Например, $0235 = \{\text{белой, легкой и т.д.}\}$

Грамматика языка строится поэтапно в следующем порядке: 1. словоформы; 2. лексические группы; 3. синтаксические отношения; 4. предложения.

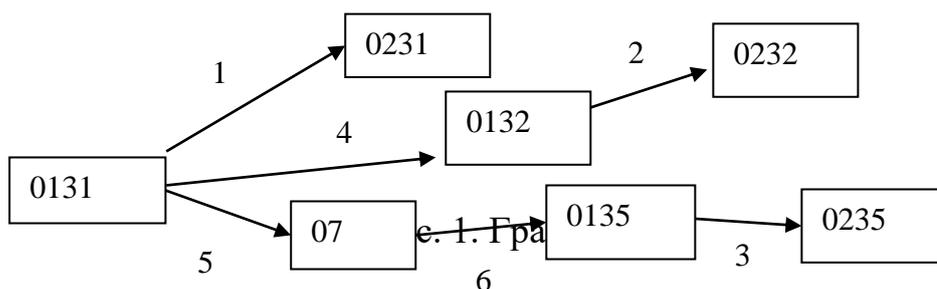
Построение синтаксиса начинается с выбора конечного числа синтаксических отношений. Синтаксическое отношение (СО) – это прямое произведение двух лексических групп. Элементы СО называются словосочетаниями.

Рассматриваемый нами синтаксис будет построен на следующих шести СО, определенных на семи группах: (3) и группа глаголов 07:

Произведение множеств, например, $0131 * 0231 = \{\text{почта, доска} \dots\} * \{\text{белая, легкая} \dots\}$ состоит из пар (v, w) , где $v \in 0131, w \in 0231$. То есть, $0131 * 0231 = \{(\text{почта, белая}), (\text{доска, белая}) \dots\}$

Элементы $0131 * 0231, 0132 * 0232$ и $0135 * 0235$ в грамматике ЕЯ называются *согласованными определениями*, а словосочетания из $0131 * 0132$ – *несогласованными определениями*.

Через $CodeL$ обозначим множество из семи лексических групп, а $CodeR$ – множество из перечисленных выше шести СО. Как известно $CodeG = (CodeL, CodeR)$ есть ориентированный граф, который далее будет назван *синтаксисом*. Граф $CodeG$ показан на Рис. 1. Около дуг указаны номера СО.



Синтаксической формой (СФ) или *правилом*, порождающим предложения в синтаксисе $CodeG$, является любое *корневое дерево* в $CodeG$, если в нем присутствует дуга из $0131 * 07$. Иначе говоря, в предложении должны быть и подлежащее из 0131 и сказуемое из 07.

Если в СФ заменить имена (коды групп) всех его вершин словоформами из этих групп, то получится *предложение* в синтаксисе $CodeG1$.

Например, дерево *CodeG1* само является СФ, она порождает *предложение-дерево*, показанное на Рис. 1. Левосторонним обходом этого дерева получим следующую *предложение-последовательность* (словоформ).

вода холодная речки льется струейсвежей (1)

Переставляя ИС и ИП в согласованном определении, как это принято в грамматике русского языка, получим *предложение* (1). Для нас *предложение* (1), (2) и *G* из Рис. 1 идентичны.

Теперь вернемся к исходной задаче: требуется построить формальную грамматику (в виде последовательности подстановок), порождающую СФ *предложения* вида (2).

11. <существительное1> → 0131<ИС>,
12. <существительное2> → 0132<ИС>,
13. <существительное3> → 0135<ИС>,
14. <прилагательное1> → 0231<ИП>,
15. <прилагательное3> → 0235<ИП>,
16. <глагол> → 07 <глагол>,
17. <дополнение1> → (<существительное3>, <прилагательное3>),
18. <сказуемое> → (<глагол>, <дополнение1>),
19. <подлежащее> → <существительное1>,
20. <предложение> → <подлежащее> (<прилагательное1>, <существительное2>, <сказуемое>)

Нетрудно проверить, что правила 11 – 20 порождают СФ, представленную деревом *CodeG1*. Мы имеем грамматику одного класса предложений, порождаемых конкретной СФ.

Возникает естественный вопрос: сколькими СФ пользуется человек (учитель, артист, писатель и т.д.) в разговоре или при сочинении текста? Вопрос сам по себе интересный для лингвистики. Чтобы ответить на этот вопрос, можно взять текст (доклад, повесть и т.д.) на русском языке подряд вручную строить СФ для простых предложений данного текста. (Сложные предложения разбиваются на простые)

Как строится СФ для заданного предложения мы уже знаем. Предложение представляется в виде дерева, и имя каждой вершины (словоформы) заменяется кодом лексической группы, к которой принадлежит данное имя. Полученное таким образом дерево и будет искомым СФ.

Две СФ считаются различными, если они не *изоморфны* или одно из них не является *поддеревом* другого.

СФ *CodeG1* и все его поддеревья с дугой (0131, 07) порождаются грамматикой 11 – 20. Поэтому они все считаются формами одного класса.

Наш опыт исследования этого вопроса о разнообразии СФ, встречающихся в заданном тексте (было бы точнее сказать в текстах на русском языке) дает нам основание сказать о том, что после анализа первых десяти страниц текста можно убедиться в том, что полсотни различных СФ практически будет трудно найти в текстах на русском языке.

Вопрос о статистике применения конкретной СФ различными авторами является актуальной и представляют практический интерес. Было бы интересно изучить эту проблему и получить числовые показатели или, как говорят, частоту применения СФ в текстах на русском языке или в произведениях данного автора.

Заключение. Здесь мы оперировали синтаксисом *CodeG*- вырезкой из синтаксиса русского языка – для наглядности и доступности рассматриваемой задачи – представление синтаксиса ЕЯ в форме порождающей грамматики из конечного набора контекстно-свободных подстановок. (Левая часть *КС-подстановки* состоят из одного терминального символа. Нетрудно заметить, что показанная выше методика представление синтаксиса ЕЯ в форме *КС-подстановок* претерпит существенных изменений при построении *КС-грамматики* русского языка.

Литература

6. Грамматика русского языка.: - М., Из-во Академии Наук СССР, 1960.

7. Харари Ф. Теория графов: - М., «Мир», 1974.

УДК 004.27

Реализация алгоритма Шора на основе IP-ядер в архитектуре ПЛИС/FPGA

С.В. Шалагин, С.А. Гришанов, магистрант

Казань, КНИТУ-КАИ

Предложен подход к реализации в архитектуре ПЛИС класса FPGA специализированного устройства для выполнения алгоритма факторизации Шора. Устройство реализуемо на основе однотипных IP-ядер на распределенной вычислительной системе с программируемой архитектурой, включающей в свой состав ПЛИС/FPGA, как существующие, так и перспективные.

Ключевые слова: алгоритм факторизации, аппаратный модуль, ПЛИС/FPGA

В настоящее время задача факторизации чисел является актуальной для различных приложений, связанных с кодированием-декодированием информации [1, 2]. Увеличение разрядности факторизируемого числа является средством обеспечения информационной безопасности для широкого класса приложений. В данной связи актуальной является задача выявления зависимости скорости разложения двоичного числа на множители в зависимости от его разрядности с применением специализированных ЭВМ. В частности, распределенных вычислительных систем с программируемой архитектурой (РВС ПА), элементами которых являются программируемые логические интегральные схемы класса FPGA (ПЛИС/FPGA) [3].

В работе определен подход к реализации алгоритма факторизации, предложенного П.Шором для квантовых компьютеров [4], на РВС ПА, в архитектуре ПЛИС/FPGA, при использовании однотипных IP-ядер [5], реализующих классические вычисления. Указанный подход, в частности, применим и для реализации широкого класса цифровых устройств на РВС ПА [6 - 8]

Алгоритм Шора основан на предложении, что для некоторого числа N , $N \bmod 2 = 1$, существует число a : $(t^a - 1) \bmod N = 0$, т. е. выполняется условие:

$$t^a \bmod N = 1; \quad (1)$$

где t – ненулевой и не единичный элемент: $\text{НОД}(t, N) = 1$. Примем $t = 2$ и обозначим $b = 2^a \bmod N$. Требуется найти множители числа N или показать, что N – простое. В случае выполнения равенства (1), множители N , m_1 и m_2 , определяются как: $m_1 = \text{НОД}(f - 1, N)$, $m_2 = \text{НОД}(f + 1, N)$, где $f = 2^d \bmod N = 1$, $d = a/2$, если $a \bmod 2 = 0$.

Алгоритм включает в себя следующие этапы.

На этапе инициализации $a = (n-1)$, $b = 2^{(n-1)}$, $d = \lceil (n-1)/2 \rceil$, $f = 2^d$.

Этап 1. Вычисление значения $b = \begin{cases} 2b: & 2b < N \\ 2b - N: & \text{иначе} \end{cases}$. Этап 2. $a = a + 1$. Этап 3.

Если $a \bmod 2 = 0$, то вычисление $f = \begin{cases} 2f: & 2f < N \\ 2f - N: & \text{иначе} \end{cases}$ и $d = d + 1$. Этап 4. Если $b = 1$,

то проверяем условие; {если $a \bmod 2 = 0$, то выдать d и f ; иначе – выдать a и сообщение об ошибке;} иначе – переход к этапу 1.

В работе представлено IP-ядро, совокупность которых позволяет реализовать Алгоритм. IP-ядро оперирует с числами разрядности $r = 56$. Данному ядру соответствуют три функционально-логические схемы, реализуемые в архитектуре ПЛИС семейств Virtex-4, Virtex-5 и Virtex-6: XC4VFX12-SF363, XC5VLX20T-FF323 и XC6VLX75T-FF484, соответственно (Xilinx, Inc.). Сравнительные оценки временной и аппаратной сложности реализации предложенного IP-ядра в архитектуре ПЛИС различных семейств приведены в таблице. Для всех представленных функционально-логических схем количество задействованных блоков ввода-вывода равно 69, а задействованных ячеек памяти (D -триггеров) – 287. Указанные оценки получены при использовании специализированной САПР ISE 14.7 (Xilinx, Inc.).

Таблица. Оценки сложности реализации IP-ядра в архитектуре ПЛИС семейств Virtex-4, Virtex-5 и Virtex-6

| Семейств о ПЛИС | Доля задействованн ых логических ресурсов (Slices) | Доля задействованн ых ячеек памяти (D- триггеров) | Доля задействованн ых блоков ввода-вывода | Максимальные время и частота задержки функционирован ия (нс/МГц) |
|--------------------|--|---|--|--|
| Virtex-4 | 356/10944 | 287/10944 | 69/240 | 11,4 / 87,7 |
| Virtex-5 | 530/12480 | 287/12480 | 69/172 | 9,59 / 104 |
| Virtex-6 | 527/46560 | 287/93120 | 69/240 | 9,34 / 107 |

В результате, для решения задачи факторизации значения N разрядности $n = 4096$, требуется 74 ПЛИС/FPGA. При этом частота работы устройства, реализующего алгоритм Шора, имеет порядок 1,86 – 1,45 МГц.

Современные РВС ПА включают в свой состав более чем 500 ПЛИС/FPGA [3], что делает решение задачи факторизации для чисел указанной размерности принципиально разрешимой с точки зрения аппаратной сложности.

Оценки времени задержки функционирования каждого из этапов алгоритма в предложенной реализации не превышает $2-4t$, где t – максимальное время задержки функционирования одного элемента АЛУ или элемента регистра, реализованных на ПЛИС/FPGA в составе РВС ПА. Верхняя оценка величины t определена задержкой БВВ, которая, в свою очередь, определяется согласно спецификации ПЛИС/FPGA [5]. Согласно [9], общее количество этапов классической реализации алгоритма Шора не превышает величины порядка $n = \lceil \log_2 N \rceil$.

В настоящее время представляет интерес задача исследования реализации на РВС ПА алгоритма факторизации Шора при использовании однотипных модулей, связанных между собой по данным. Причем каждый модуль реализуем не более, чем на одной ПЛИС класса FPGA, входящей в состав современных РВС ПА, как существующих, так и перспективных.

1. Ишмухаметов Ш.Т. Методы факторизации натуральных чисел.: учебное пособие / Ш.Т. Ишмухаметов. – Казань: Казан. ун.-т, 2011. – 192 с.
2. Шнайер, Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си/ Б.Шнайер. – М.: Триумф, 2002. – 816 с.
3. Дордопуло, А.И. Высокопроизводительные реконфигурируемые вычислительные системы/ А.И. Дордопуло, И.А. Каляев, И.И. Левин и др.// "Суперкомпьютеры". – 2010. – № 3 (3). – С. 44–48.
4. Shor, P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring/ P.W.Shor// Foundations of Computer Science: Conf. Publications. – 1994. – P. 124 – 134.
5. Зотов, В.Ю. Проектирование встраиваемых микропроцессорных систем на основе САПР фирмы Xilinx / В.Ю. Зотов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 522 с.
6. Захаров В.М. Вычисление нелинейных полиномиальных функций на многопроцессорной вычислительной системе с программируемой архитектурой/ В.М. Захаров, С.В. Шалагин// Информационные технологии. – 2012. – № 5. – С. 6-11.
7. Шалагин, С.В. Реализация устройств вычислительной техники на многопроцессорных системах с программируемой архитектурой/ С.В. Шалагин// Вестник поволжского государственного технологического университета. Сер. «Радиотехнические и инфокоммуникационные системы». – 2011. – № 1. – С. 38-46.
8. Захаров В.М. Алгоритм вычисления остатка по модулю и оценки его сложности в базисе ПЛИС/ В.М. Захаров, Е.Л. Столов, С.В. Шалагин// Информационные технологии. – 2010. – № 11. – С. 32-36.
9. Feynman, R. Quantum Mechanical Computer/ R. Feynman// Foundations of Physics. – 1986. – Vol. 16. – pp. 507 – 531.

УДК 004.27

Моделирование генератора дискретных случайных величин с заданным законом распределения в архитектуре ПЛИС/FPGA

С.В. Шалагин, Д.Р. Харисов,

Казань, КНИТУ-КАИ

Предложен подход к реализации в архитектуре ПЛИС класса FPGA специализированного устройства для генерирования дискретных случайных величин с заданным законом распределения. Устройство реализуемо при использовании распределенных вычислений на основе поступающих извне равномерно распределенных (псевдо)случайных последовательностей.

Ключевые слова: дискретная случайная величина, заданное распределение, ПЛИС/FPGA

Генераторы дискретной случайной величины (ДСВ) с заданным законом распределения находят широкое применение при решении широкого круга задач статистического моделирования [1 - 4]. Особенно актуальна задача реализации высокоскоростных генераторов указанного типа с целью получения массивов большого размера из реализаций ДСВ за ограниченный период времени [5 - 7]. Для решения указанной задачи применима технология проектирования цифровых устройств на программируемых логических интегральных схемах (ПЛИС) класса FPGA [8, 9], позволяющая реализовать различные генераторы ДСВ с разным законом распределения в различные периоды времени [10, 11].

Решена задача моделирования на ПЛИС/FPGA генератора ДСВ $X = \{x_i\}$ с требуемым законом распределения, заданным вектором $\{p_i\}$, $i = \overline{0, l-1}$, $\sum_{i=0}^{l-1} p_i = 1$. Решение выполнено путем аппаратной реализации второго этапа известного алгоритма генерирования группы из l несовместных случайных событий. Первым этапом указанного алгоритма является генерирование равномерно распределенного (псевдо)случайного числа [1, стр. 38-39].

На вход генератора подаются n -разрядные равномерно распределенные (псевдо)случайные числа. Если они представляют собой M -последовательность

[12], то они распределены на интервале $[1, 2^n - 1]$. Если числа являются последовательностью де-Брейна [13], то они распределены на интервале $[1, 2^n - 1]$. Мощность элементов последовательности в первом случае $Q = 2^n - 1$, во втором – $Q = 2^n$. Данная величина играет роль в определении точности вероятности генерирования заданных значений ДСВ $X = \{x_i\}$, $i = \overline{0, l-1}$, снимаемых с выхода синтезируемого генератора.

На этапе инициализации на основе закона распределения ДСВ задается множество констант $\{c_i\}$: $c_i = \left(\sum_{j=0}^i p_j\right) / Q$, $i = \overline{0, l-1}$.

На этапе функционирования, на каждом такте, на вход генератора поступает заданное равномерно распределенное (псевдо)случайное число. На выход генератора выводится одно из значений $x_i \in X$: $\min i, \left(\sum_{j=0}^i p_j < c_{i+1}\right)$, $1 \leq i \leq (l-1)$. Погрешность частоты реализации значений $x_i \in X$, $i = \overline{1, l-1}$, составляет $\Delta_i = \left|c_i - \sum_{j=0}^i p_j\right| \leq 0,5/Q$.

Структурная схема, моделирующая генератор ДСВ, включает в свой состав $(l-1)$ компаратор для n -разрядного числа с константой c_i , $i = \overline{1, l-1}$, а также кодер. На вход кодера поступают сигналы, соответствующие одному из несовместных случайных событий – реализации ДСВ $x_i \in X$, $i = \overline{0, l-1}$. С выхода кодера снимается значение i в двоичном коде, разрядность которого – $\lceil \log_2 l \rceil$. Таким образом, генератор ДСВ требует для своей реализации на ПЛИС/FPGA $n + \lceil \log_2 l \rceil$ блоков ввода-вывода.

Представляет интерес следующий аспект моделирования генераторов ДСВ на ПЛИС/FPGA. При увеличении значения разрядности случайных чисел, подаваемых на вход генератора, повышается точность вычисления вероятности генерирования ДСВ $X = \{x_i\}$, $i = \overline{0, l-1}$, на этапе инициализации. Вместе с тем, наблюдается линейный рост количества компараторов и блоков ввода-вывода, требуемых для реализации генератора ДСВ в архитектуре ПЛИС/FPGA.

Библиография

10. Бусленко Н.П. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах/ Н.П.Бусленко, Ю.А. Шрейдер - М.: Физматгиз, 1961. - 226 с.
11. Яковлев, В.В. Стохастические вычислительные машины / В.В. Яковлев, Р.Д. Федоров. – Л.: Машиностроение, 1974. – 343 с.
12. Бухараев Р.Г. Аппаратно-программная реализация методов стохастической геометрии в распознавании образов/ Р.Г.Бухараев, Н.Р.Бухараев, В.М.Захаров и др.// Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах: сб. трудов междунар. конф. –Казань: Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева. 1998. – Т. 4. – Вып.7. – С. 32–37.
13. Кузнецов, В.М. Генераторы случайных и псевдослучайных последовательностей на цифровых элементах задержки: монография/ В.М. Кузнецов, В.А. Песошин. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2013. – 336 с.
14. Захаров, В.М. Вычисление нелинейных полиномиальных функций на многопроцессорной системе с программируемой архитектурой/В.М.Захаров, С.В.Шалагин// Информационные технологии. – 2012. – №5. – С. 6–11.
15. Захаров, В.М. Параллельные марковские модели над полем $GF(2^n)$ / В.М.Захаров, С.В.Шалагин// Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: тез. докл. 8-й Междунар. конф. 17 – 21 нояб. 2008. – Казань: Изд-во КГТУ им. А.Н. Туполева, 2008. – С. 155–160.
16. Захаров, В.М. О развитии аппаратных средств статистического моделирования/ В.М.Захаров, С.В.Шалагин// Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и странах бывшего СССР: история и перспективы (SORUCOM-2014): сб. тр. третьей межд. конф. – Казань, 2014. – С. 109–114.

17. Virtex-4 Family Overview / Xilinx Inc. Cop. 2011. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds112.pdf.
18. Virtex-7 FPGAs Data Sheet: DC and Switching Characteristics. DS183 (v1.0) March 1, 2011/ Xilinx Inc. Cop. 2011. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds183_Virtex_7_Data_Sheet.pdf.
19. Дордопуло, А.И. Высокопроизводительные реконфигурируемые вычислительные системы / А.И. Дордопуло, И.А. Каляев, И.И. Левин и др. // «Суперкомпьютеры». – 2010. – № 3 (3). – С. 44–48.
20. Каляев, И.А. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные системы для решения потоковых задач обработки информации и управления/ А.В. Каляев, И.И. Левин// Параллельные вычисления и задачи управления (РАСО'10): пленарные докл. 5-ой Междунар. конф. 26–28 окт. 2010. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 23–37.
21. Сарвате Д.В., Персли М.Б. Взаимно-корреляционные свойства псевдослучайных и родственных последовательностей // ТИИЭР, 1980, т. 68, №5. С.59-90.
22. Иванов М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. М.:КУДИЦ-ОБРАЗ, 2001. 368 с.

УДК 167/168; 008

Когнитивные проблемы компьютерного моделирования как предмет исследования информатики и социогуманитарных наук

С.В. Шалагин, Г.Э.Шалагина

. Казань, КНИТУ-КАИ

Идентифицирован когнитивный предел компьютерного моделирования при создании и исследовании технических систем по мере их усложнения. Эти проблемы актуальны с одной стороны, в постмодерном гуманитарном контексте, в условиях информационного общества, с другой стороны – для

философии науки, учитывая возрастание в целостной научной парадигме роли информационных наук.

Ключевые слова: когнитивный барьер, аберрация когнитивного процесса, инновационизм

Актуальность постановки вопроса о когнитивных проблемах компьютерного моделирования связана с активным осмыслением в постмодерной культуре, философии места и роли информатики, новейших технических разработок в антропологической перспективе, в аспекте их влияния на статус, природу и судьбу человека в новой информационной социальной реальности. Научное творчество в области компьютерного моделирования в ходе своего осуществления упирается в когнитивный барьер и когнитивную аберрацию[1-3], то есть в антропологически заданные границы применимости технического мышления. Когнитивный предел при выполнении компьютерного моделирования заключается в том, что 1) компьютерная модель сложной системы трудно формализуема, оказываясь сложнее самой реальности; 2) аудиовизуальные отображения, производимые ЭВМ, накладываются на действительность, вытесняя представления о самой действительности.

Неотъемлемая часть компьютерного моделирования – сопоставление объекта и его компьютерной модели (КМ) по характеристикам, которые являются существенными для исследования, т.е. верификация и валидация КМ [4].

Выполнение КМ изначально предполагает концептуализацию и формализацию создаваемой модели. При этом актуализируется проблема когнитивного барьера, обозначаемая следующим образом. С одной стороны, производится абстрагирование от определенных характеристик объекта моделирования, которые, по мнению исследователя, являются не существенными. При этом исследователь, согласно [5, стр. 42] руководствуется собственной интуицией, опирающейся на постановку прикладной задачи и понимание природы объекта моделирования. Кроме того, имеет место

упрощение характера связей между характеристиками объекта. Например, линейризация связей между параметрами КМ с целью ее упрощения, при наличии у исследователя информации о нелинейном характере указанных связей. Следствием подобного абстрагирования и упрощения является создание идеального образа моделируемого объекта. Подобная идеализация неизбежно влечет за собой ограничения на адекватность создаваемой КМ. Внутренние и выходные характеристики моделируемого объекта отображаются с приемлемой точностью только на ограниченной области адекватности в пространстве входных параметров КМ.

При компьютерном моделировании сложных систем актуальна также проблема аберрации когнитивного процесса. Существуют классы сложных систем, при моделировании которых процедуры верификации и/или валидации, выполняемые при создании КМ, либо не возможны в обозримом будущем (например, модели из области астрофизики) либо сопряжены с нарушением морально-этических и/или правовых запретов (например, при исследовании социальных процессов). Кроме того, при выполнении компьютерного моделирования сложных систем, целостное и всестороннее представление об изучаемом объекте существует не у каждого исследователя и даже не у каждой группы исследователей. В данной связи, трудоемкие процессы верификации и/или валидации создаваемой КМ в отдельных случаях бывают выполнены не достаточно качественно. Существует два источника аберрации когнитивного процесса при выполнении компьютерного моделирования: 1) ограничения на проверку степени адекватности создаваемой КМ, естественные или искусственные и 2) субъективная ограниченность знаний исследователей, создающих КМ, об объекте исследования – о сложной системе. Компьютерные модели, область адекватности которых не идентифицирована, безусловно, выполняют когнитивную функцию, но применимы в процессе познания только лишь на уровне постулатов и рабочих гипотез. Из-за объективизации и натурализации результатов, полученных на компьютерной модели с не идентифицированной областью адекватности, и давления указанных

результатов на понимание исследователей, имеет место опасность аберрации когнитивного процесса при компьютерном моделировании сложных систем.

Проблема аберрации когнитивного процесса и когнитивных проблем компьютерного моделирования значимы в информационном обществе в силу двух обстоятельств. Во-первых, установка на инновационизм диктует необходимость быстрого внедрения результатов компьютерного моделирования в практику. Современные гаджеты, необходимые как в сфере досужего потребления, так и в производстве, интернет вещей, технологии умного города и умной нации, роботизация – вот не полный перечень примеров такого внедрения. Во-вторых, возрастание роли информационных наук в современной научной парадигме, как в естествознании (инфохимия), так и в социогуманитарных науках (цифровая антропология). В вопросе о перспективах влияния новейших технологий на судьбу человека существуют две основные социогуманитарные тенденции: трансгуманистическая и археоавангардная. Первая линия поддерживает технический инновационизм, вплоть до трансформации, киборгизации и различного иного технического «улучшения» человека, например, создания интерфейсов «мозг – компьютер» [6]. Вторая социогуманитарная позиция предлагает уравнивать технический инновационизм здоровым консерватизмом [7]. Кто будет лидировать после постмодерна – техника или человек? Ведь известно, что корпорация Microsoft запатентовала человеческое тело как элемент беспроводной связи [9].

Обозначены два полюса, в гуманитарном контексте которых в настоящее время ведется создание и развитие методологии КМ сложных объектов. Какую же тенденцию поддерживать? Ответ на этот вопрос должен быть получен в тесной взаимосвязи гуманитарных и технических наук. В условиях постмодерна деятельность создателей КМ сложных объектов должна сопровождаться осуществлением философской рефлексии.

14. Галанова Г.Э. Когнитивные проблемы компьютерного моделирования в контексте культуры постмодерна/ Г.Э.Галанова, С.В.Шалагин// Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. – 2014. – № 1. – С. 178 – 182.
15. Шалагин С.В. Когнитивные проблемы компьютерного моделирования в информационной химии: технический и гуманитарный аспекты/ С.В.Шалагин, Г.Э.Шалагина// Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т 17. Вып. 19. – С. 435 – 437.
16. Шалагин С.В. Когнитивные проблемы проектирования на основе компьютерных моделей: технический и социо-гуманитарный аспекты/ С.В.Шалагин, Г.Э.Шалагина // Онтология проектирования. 2016. – Т. 6, № 3 (21). – С. 368 - 376. – DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-3-368-376.
17. Советов Б.Я. Моделирование систем: Учеб. для бакалавров / Б.Я.Советов, С.А.Яковлев. – 7-е изд. – М.: «Юрайт», 2012. – 343 с.
18. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем/ Н.П.Бусленко. - М.: Наука, 1968. – 356 с.
19. Каплан А.Я. Управление «силой мысли»: новый уровень человеческих возможностей/А.Я.Каплан. // Школьные технологии. – 2010. – № 3. – С. 22 – 25.
20. Кутырёв В.А. Время Mortido /В.А.Кутырёв. – СПб: Алетейя, 2012. – 336 с.
21. Пат. 6754472 В1 США МПК⁷: H04Q 7/20. Method and apparatus for transmitting power and data using the human body/ Williams; Lyndsay (Cambridge, GB); Vablais; William (Woodinville, WA, US); Bathiche; Steven N. (Bellevue, WA, US); заявитель и патентообладатель Microsoft Corporation (Redmond, WA, US); № 559746; заявл. 27.04.2000; опубл. 22.06.2004. [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.google.com/patents/download/Method_and_apparatus_for_transmittin_g_po.pdf?id=30YSAAAAEBAJ&ie=ISO-8859-1&output=pdf&sig=ACfU3U1ejJi7BERMW4ShhlovA9OBYL-akg, свободный, 09.01.17

Расчет теплопроводности песчаника в зависимости от давления

С.Н. Эмиров¹, В.Д. Бейбалаев^{1,2}, А.А. Аливердиев^{1,2}, А.А. Амирова², Г.Г.

Галжиев², А.Э. Рамазанова¹, Ф.Ф. Малиева²

ФГБУН Институт проблем геотермии ДНЦ РАН, Махачкала

e-mail: wemirov@mail.ru, kaspj_03@mail.ru

Дагестанский государственный университет

e-mail: kaspj_03@mail.ru

Высокие давления и температуры являются достаточно сильными инструментами, при помощи которых можно воздействовать на керамику и горные породы для исследования их теплофизических свойств в конденсированном состоянии.

Результаты лабораторных исследований диэлектриков и горных пород в условиях высоких давлений в сочетании с высокими температурами широко используются для теоретического экспериментального моделирования различных физика–механических, физика–химических, тепловых, ультразвуковых и тектонических процессов и явлений, происходящих в твёрдых телах.

Результаты исследований температурной зависимости решёточной теплопроводности $\lambda(T)$ твёрдых тел, начатые Эйкиным [3] и теоретически обоснованные в работах Дебая, Пайерса, Клеменса и Займана [4-6] показали, что $\lambda(T)$ кристаллических твёрдых тел в области температур выше температур Дебая ($T \geq Q$) обратно пропорциональна температуре за счёт 3^x -фононных процессов рассеяния тепловых волн и можно описать равенством :

$$\lambda(T) = C \cdot T^n, \quad (1)$$

Расчет теплопроводности песчаника

Для экспериментальных измерений теплопроводности в условиях высоких давлений и температур были взяты природные образцы мелкозернистого песчаника (Россия, Республики Дагестан, глубина залегания 4495 - 4900м, открытая пористость $K=7\%$; плотность $g = 2.28 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$).

Результаты эксперимента представлены в таблице 2, 3 и на рис 3,4 как функция $\lambda(P,T)$.

Таблица 1.

| Т | Давление МПа | | | | | | | | |
|-----|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 0.1 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | |
| 273 | 2.06 | 2.18 | 2.2 | 2.24 | 2.25 | 2.26 | 2.27 | 2.28 | 2.29 |
| 323 | 1.91 | 2.10 | 2.13 | 2.16 | 2.17 | 2.19 | 2.20 | 2.21 | 2.22 |
| 373 | 1.83 | 2.03 | 2.07 | 2.10 | 2.11 | 2.13 | 2.14 | 2.15 | 2.16 |
| 423 | 1.76 | 1.97 | 2.01 | 2.04 | 2.06 | 2.08 | 2.09 | 2.10 | 2.10 |
| 473 | 1.71 | 1.92 | 1.97 | 2.00 | 2.03 | 2.04 | 2.05 | 2.06 | 2.05 |
| 523 | 1.66 | 1.88 | 1.94 | 1.96 | 1.97 | 2.00 | 2.01 | 2.02 | 2.02 |

Зависимость теплопроводности песчаника от давления и температуры отличается от модели Дебая [1,2,3], где $\lambda(T) \approx T^{-1}$, и описывается в виде равенства:

$$\lambda(P,T) \approx \lambda_0 C \left(\frac{P}{P_0} \right) \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\alpha \cdot (P/P_0)^\beta},$$

где α – барический коэффициент показателя степени.

Получено уравнение для расчета теплопроводности в зависимости от температуры и давления вида

$$\lambda(T,P) = \lambda_0 \cdot 0.98 \cdot \left(1 + \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{0.142 \Delta \lambda_P}{\lambda_0}} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{1.54 \cdot \Delta \lambda_T}{\lambda_0} \cdot \left(1 + \frac{P}{P_0} \right)^{0.65 \cdot \ln(\lambda_0 / (\lambda_0 + \Delta \lambda_P))}}, \quad (2)$$

где $\Delta \lambda_P = 0.22$ - среднее суммарное приращение теплопроводности при постоянной температуре, $\Delta \lambda_T = 0.443$ - среднее суммарное приращение теплопроводности при постоянном давлении, $P_0 = 0.1$, $T_0 = 273$, $\lambda_0 = \lambda(T_0, P_0) = 2.06$ для песчаника. Значения $\Delta \lambda_P$, $\Delta \lambda_T$ смоделированы на основании экспериментальных данных.

На рисунке 1 приведены графики зависимостей теплопроводности от давления, построенные по экспериментальным данным и согласно уравнению (2).

Максимальная относительная погрешность данных полученных согласно уравнению (2) по отношению к экспериментальным данным равна 1.798%.

T

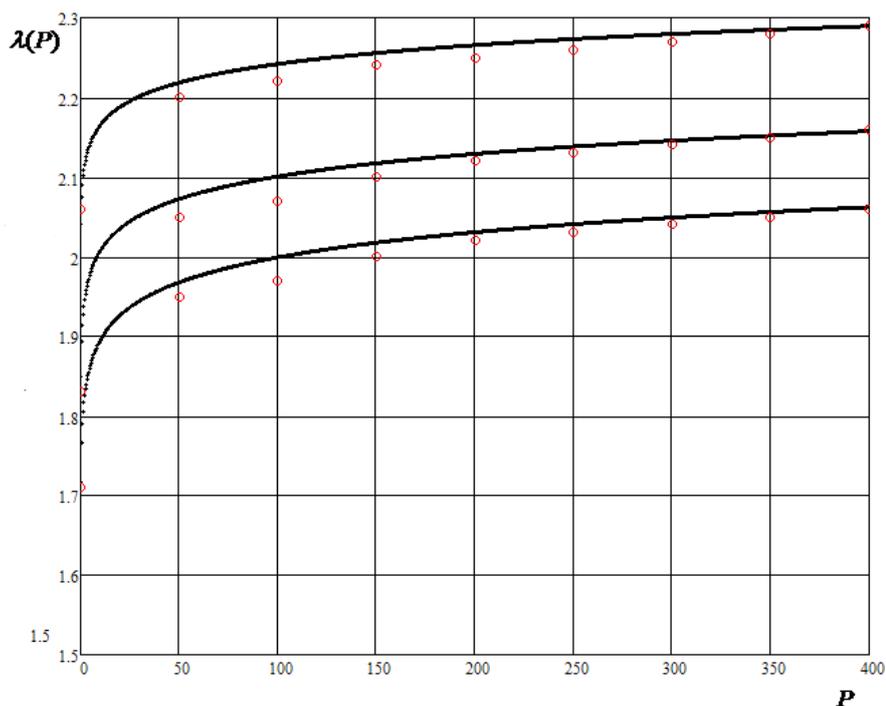


Рис. 2. Зависимость теплопроводности песчаника от давления при постоянной температуре.

Литература

1. Eucken A. 1911. Ann. d. Phys. 34.185.
2. Eucken A. 1932. Forsch. Gehiete Ingenieurue B3, Forschung 353, 16-28.
3. Debye P. 1912. Ann. Phys. 39, 789.
4. Ziman J.M. 1962. Electrons and Phonons. The Theory of Transport Phenomena in Solids. Clarendon Press. Oxford/
5. Стилбанс Л.С. 1967. Физика полупроводников. М. «Сов.радио»
6. Klemens P. G. 1958. Sol. St. Phys. V.7, p. 7, Acad. Pres. New. York.

7. Эмиров С.Н. 2009. Температурная и барическая зависимость теплопроводности моно- и поликристаллических образцов антимонида галлия. Ж. Физ. и хим. Обработки металлов, 2009, №4, с.60-63.

Моделирование потоковыми методами задачи дефрагментации матрицы расписания

А.З. Якубов

*Махачкала, Дагестанский государственный университет
yakubovaz@mail.ru*

В статье рассматривается вопрос существования для матрицы из семи столбцов, каждый из которых содержит кроме нулей, некоторую перестановку первых n натуральных чисел, матрицы тех же размеров, сохраняющей множество элементов исходной матрицы в каждом столбце и каждой строке и такой что, в каждой строке все ненулевые элементы расположены слитно. В статье найдены необходимые и достаточные условия такого уплотнения матрицы из 7 столбцов в случае, когда строки могут содержать 1, 2, 5, 6, 7 ненулевых элементов. Случай когда в строке либо 3 либо 4 ненулевых элемента представляет отдельный интерес и рассмотрен автором в [3]. В статье автор придерживался обозначений и приемов доказательств, изложенных в [1], [2].

Если в дефрагментированной матрице M^* рассмотренного в [2] класса $P_{\{2,5,7\}}^{[k,7,n]}$ путем вертикальных перемещений совместить "выровненную влево" (с ненулевыми элементами в позициях 1-2) строку из $M^{*(2)}$ с "выровненной вправо" (с расположением ненулевых элементов в позициях 3-4-5-6-7) строкой из $M^{*(5)}$, аналогично: выровненную вправо строку из $M^{*(2)}$ со строкой из $M^{*(5)}$, выровненной влево, получим "упакованный" вариант M^0 матрицы изображенного на рис. 1 вида, где горизонтальной штриховкой указаны ненулевые элементы строки множества $M^{*(2)}$, ненулевые элементы строки из $M^{*(5)}$ выделены диагональной штриховкой; а элементы строки из $M^{*(7)}$ оставлены светлыми.

Рассмотрение в [2] по существу использовало тот факт, что каждая строка *упакованной* дефрагментированной матрицы представлена в средних трех столбцах тремя (ненулевыми) элементами.

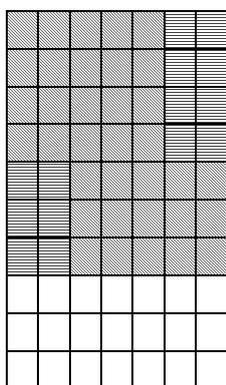


Рис. 1. Упакованный вариант матрицы класса $P_{\{2,5,7\}}^{[k,7,n]}$

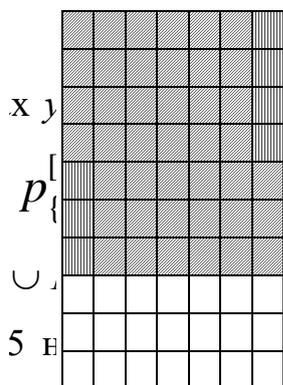


Рис. 2. Упакованный вариант матрицы класса $P_{\{1,6,7\}}^{[k,7,n]}$

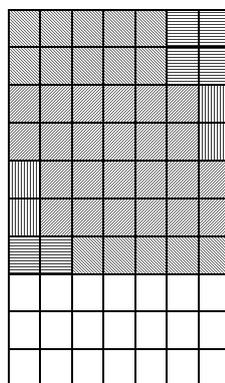


Рис. 3. Упакованный вариант матрицы класса $P_{\{1,2,5,6,7\}}^{[k,7,n]}$

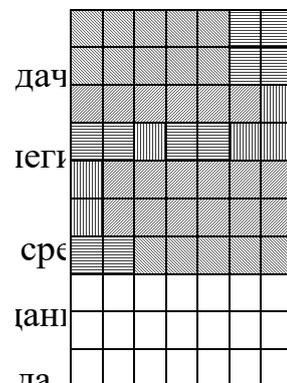


Рис. 4. Упакованный вариант матрицы класса $P_{\{1,2,5,6,7\}}^{[k,7,n]}$

сохранено лишь для облегчения рассмотрения. Замена данного условия на условие $|M^{(1)}| = |M^{(6)}|$ не является принципиальной. Соответствующая схема упакованного варианта дефрагментированной матрицы, как выяснится из дальнейшего, будет соответствовать приведенному на рис.3 виду, где ненулевые элементы каждой строки выровнены к левой или правой границам. Затруднение поиска условий дефрагментации без предварительных ограничений вида:

$$|M^{(1)}| = |M^{(6)}| \quad \text{или} \quad |M^{(2)}| = |M^{(5)}|$$

вызвано усложненной конфигурацией упаковки, когда, ненулевые элементы, например, строки из $M^{*(1)}$ или $M^{*(2)}$ необязательно выровнены к границе. Найти необходимые и достаточные условия дефрагментации в общем виде нам не удалось. Пусть сначала рассматриваемая матрица M принадлежит классу $P_{\{1,6,7\}}^{[k,7,n]}$ и выполнено условие $|M^{(1)}| = |M^{(6)}|$.

Приведенное ниже построение транспортной сети $T(M)$ мало отличается от аналогичного построения в [2].

Вершины. Множество вершин составляют

T_1 - источник, T_2 - сток;

n вершин x_1, x_2, \dots, x_n , соотнесенные элементам множества $\{1, 2, \dots, n\}$;

$\chi = / M^{(6)} \cup M^{(7)} /$ вершин y_1, y_2, \dots, y_χ , последовательно соотнесенных

строкам множества $M^{(6)} \cup M^{(7)}$ функцией η , $\eta : \{y_1, y_2, \dots, y_\chi\} \rightarrow M^{(6)} \cup M^{(7)}$;

Дуги. От источника T_1 к каждой из вершин x_s проведена дуга с потоковыми ограничениями $[5, 5]$; от вершины x_s ($s=1, 2, \dots, n$) к вершине y_t дуга проведена тогда и только тогда, когда соответствующая строка $\eta(y_t)$ содержит число s , при этом дуге (x_s, y_t) приписываются потоковые ограничения $[0, 1]$; от каждой вершины y_t к стоку T_2 проведена дуга с ограничениями $[5, 5]$. Легко видеть, что в случае существования дефрагментированного варианта матрицы M ненулевые элементы строк множества $M^{*(6)}$ могут начинаться только с первой или второй позиций. Доказана Теорема1:

Теорема 1. Для дефрагментации матрицы M класса $P_{\{1,6,7\}}^{[k,7,n]}$, для которой имеет место равенство $|M^{(1)}| = |M^{(6)}|$, необходимо и достаточно существование допустимого потока в транспортной сети $T(M)$.

Вернемся теперь к рассмотрению дефрагментации матрицы класса $P_{\{1,2,5,6,7\}}^{[k,7,n]}$, в которой "мало" строк с единственным ненулевым элементом, более точно, выполнено условие $|M^{(1)}| \leq |M^{(6)}|$. Транспортная сеть $T^{**}(M)$ в формулировке следующего результата отличается от сети $T(M)$, используемой в Теореме1, лишь заменой множества $M^{(5)} \cup M^{(7)}$ на множество $M^{(5)} \cup M^{(6)} \cup M^{(7)}$. Доказана следующая Теорема2:

Теорема 2. Для дефрагментации матрицы M из класса $P_{\{1,2,5,6,7\}}^{[k,7,n]}$, $|M^{(1)}| \leq |M^{(6)}|$, необходимо и достаточно существование допустимого потока в сети $T^{**}(M)$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Магомедов А.М. Дефрагментация таблицы перестановок из 4 столбцов. // Дискретная математика, том 21:4, 2009, с.95-104.

2. Якубов А.З. Моделирование задачи оптимизации расписания потоковыми методами. Сб. трудов международного Российско-болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». КБР, г.Нальчик, Хабез 2010г., с.271-273.
3. Якубов А.З. Потоковое решение задачи о «беззаконном» расписании. Сборник статей IX региональной научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, экономике, образовании». Махачкала 2008, с. 65-67.
4. Оре О. Теория графов. М., 1978 г.

Сознание подсказывает

Ш.Г. Гамидов

Махачкала, Дагестанский государственный университет

В 50-е годы XX века, в период восстановления народного хозяйства, разрушенного войной 1941-45 годы, с большим энтузиазмом трудились все граждане СССР. Это касалось не только рабочего класса и крестьянства, но и учащихся вузов и школ. Тяга молодежи к знаниям привела к увеличению приема в вузы и созданию новых вузов и факультетов. Мне посчастливилось в этот период быть студентом физико-математического факультета математического отделения Дагестанского педагогического института им. С.Стальского.

В 1954 г. институт перешел в новый учебный корпус около рынка №2.

На учебу ходили пешком, через площадь Сталина (ныне Ленина). Утром часто встречали хорошо одетого человека, который шел на работу, на улицу Маркова. Он, при встрече людей, часто останавливался, разговаривал с ними. На расстоянии 15-20 метров за ним ходил человек, ничем не отличающийся от других по одежде и телосложению, который останавливался, когда первый беседовал со встречными. Потом узнали, что этот первый человек был Даниялов А.Д., а второй – телохранитель первого. Так свободно ходил по городу первый руководитель республики.

Среди преподавателей-математиков только один Таймуразов Х.Э. имел учёную степень кандидата физико-математических наук. Он был и заведующим

кафедрой математического анализа. Был весьма честным и справедливым, одновременно и требовательным преподавателем.

В 1958 г. на факультете вернулся доцент Мейланов С.Д., второй ученый-математик из дагестанцев. С 1961 г. он стал заведовать кафедрой математического анализа. Первой же задачей Сиражудина Джамалдиновича на должности заведующего кафедрой была подготовка ученых кадров по математике. Не будет преувеличением, если сказать, что все ученые математики, кому за 50-60 лет, получили прямые или косвенные рекомендации С.Д. Мейланова.

В 1970г. университет приобрел для математического факультета вычислительную машину «Сетунь», чуть позже «Одра», которая еле-еле поместилась в актовом зале учебного корпуса на ул.Дзержинского, 12. Инициатором создания вычислительной лаборатории был декан математического факультета Алишаев М.Г. Эти машины соответствовали уровню развития вычислительной техники 70-х годов. Сегодня, через 40-50 лет, произошел большой скачок в деле совершенствования вычислительной техники. При факультете создан вычислительный центр, на всех факультетах имеются компьютерные классы. Весомую лепту в этом деле внесли преподаватели Халилов А.И., Титакаева П.Т., Магомедов А.М., Назаралиев М.А., Ахмедов С.А., Рамазанов А.К., Абдуллаев Г.Ш.

Профессорско-преподавательский состав математического факультета самый, как говорится, степенный в университете – более 87% преподавателей имеют ученых степеней и званий. Плодотворно работали и работают профессора Абилов В.А., Айгунов Г.А., Алиев Р.Г., Алишаев М.Г., Вагабов А.И., Кадиев Р.И. Магомедов А.М., Назаралиев М.А., Рамазанов А.К., Сиражудинов М.М., Халилов А.И..

В 1996-1997 гг. стал подниматься уровень Каспия. Ученые, в том числе и математики, заинтересовались этой проблемой. По инициативе математика Вердиева В.Г. в университете была создана лаборатория по изучению этого вопроса. В сентябре 1997г. в Махачкале состоялась международная

конференция, куда приехала и группа московских математиков во главе с патриархом математического образования, 92-летним академиком С.М.Никольским. На конференции обсуждались и вопросы, связанные с современным состоянием математической науки в целом. Наряду с гостями, по результатам научных исследований выступили доценты Абилов В.А., Айгунов Г.А., Вердиев В.Г., Гамидов Ш.Г. Рамазанов А.К., Хаиров А.Р. Академик дал высокую оценку исследованиям математиков нашего университета и обещал содействовать защите ими докторских диссертаций. Через два-три года Рамазанов А.К., Айгунов Г.А. и Абилов В.А. стали докторами физико-математических наук.

Нами была организована поездка московских гостей в г. Дербент. В крепости «Нарын-Кала» встретили свадебный кортеж в музыкальном сопровождении. Узнав, что с нами находится академик с мировым именем, молодежь, танцующая с молодоженами, пригласила Сергея Михайловича на танец. В середине танца, как принято у нас, коренастый танцор вытащил из кармана бумажник и подарил невесте 1000 рублевую купюру. Жених, естественно, не остался в долгу и подарил нашей группе коробку с набором коньяков и чурек с халвой.

На следующий день Никольский С.М. выступил перед учащимися физико-математических классов г. Махачкала и говорил о новых учебниках по математике, составляемых группой математиков под его руководством.

Что касается уровня Каспия, то ученые пришли к выводу, что это периодический процесс, который повторяется через 50-60 лет и не представляет опасности, ибо и раньше происходили такие явления. Потом, через три-четыре года происходило падение уровня Каспия примерно на 70-80см., что мы имеем и в настоящее время.

Через 8 лет, на 100-летний юбилей Сергея Михайловича в Москву поехали три математика из Дагестана: Вердиев В.Г., Рамазанов А.К., Хаиров А.Р.

Не стало Никольского С.М 9 ноября 2011г. Он самый долгожитель из математиков всех времен.

С 1974г. на факультете стал выходить сборник научных работ «Функциональный анализ, теория функций и их приложения», а с 1988г., по инициативе профессора Алиева Р.Г., стали проводиться Северокавказские региональные конференции по «Функционально-дифференциальным уравнениям и их приложениям». Надо отметить, что на первые конференции приезжали известные математики из Москвы, Воронежа, Ростова, Краснодара, Перми, среди которых были авторы вузовских учебных пособий и монографий по математике Азбелев Н.В., Демидович В.Б., Долженко Е.П., Мышкис А.Д., Цалюк З.Б. и др. Выходили объемистые «Тезисы докладов» участников конференций. Позже конференции стали Международными, куда приезжали математики из ближнего зарубежья. Однако, в последние годы, в связи с криминальной обстановкой в Дагестане, контингент конференций существенно сократился и в них принимают участие только математики из Дагестана. VI

Таковы некоторые эпизоды из жизни математиков Дагестанского университета.